

Xin chào các em học sinh yêu quý, như các em đã biết năm 2017 là năm bắt đầu môn Toán được tổ chức thi dưới hình thức trắc nghiệm để đánh giá toàn bộ kiến thức của các em tuy nhiên thay vì như 2017 kiến thức thi chỉ có lớp 12 thì năm nay 2018 có cả thêm kiến thức 11 với phạm vi kiến thức lớn gói trong 50 câu hỏi với thời gian 90 phút và trung bình các em chỉ có 1 phút 48 giây, số câu hỏi tăng lên 5 lần và thời gian giảm xuống một nửa so với ngày xưa nên hình thức tự luận không còn phù hợp nữa do đó cần có những tuyệt kĩ giải nhanh thì mới mong dành được chiến thắng trong kì thi này.

Với mong muốn giúp đỡ các em đẩy mạnh tốc độ làm bài, tránh mất thời gian vào những câu dễ, dành thời gian cho câu khó để dễ dàng đạt điểm cao hơn trong kì thi thì anh đã viết 1 cuốn Bí Kíp Casio được hệ thống tuyệt kĩ theo chuyên đề có hướng dẫn chi tiết.

Khi các em đang đọc những dòng này điều đó có nghĩa là các em đang cầm trên tay bộ tâm pháp của Bí Kíp này.

Đi kèm cuốn sách gồm có 1 hệ thống Video hướng dẫn từng Skill trong sách và cập nhật các kĩ thuật mới cũng như được tham gia 1 nhóm kín hỗ trợ về bài tập, để học khóa LiveStream 7 ngày cuối ôn tập cùng Sư Phụ Lực

Đây là bộ Skill Casio Basic Version dành cho các sĩ tử mong muốn đạt được 5-8 điểm môn toán trong kì thi THPT QG, các sĩ tử muốn tu luyện lên tăng cao hơn thì đăng kí thêm Advance Version để đạt Max Level Casio để tranh giành slot vào trường top nhé!

Để nhận bản update này các em truy cập vào:

<http://bikiptheluc.com/sach>

CASIO EXPERT : Nguyễn Thế Lực

Bí

Kíp

Thế

Lực

2018 Ver1.0

Basic version



**Bí Kíp Thế Lực**  
Casio Expert: Nguyễn Thế Lực  
Bikiptheluc.com - Luyenthipro.vn  
ĐT: 0977.543.462 - Fb: AD.TheLuc

## Menu Skills

Đề minh họa lần 1,2 và Đề chính thức 2017 mã 101 kèm đáp án và giải chi tiết

**Bộ Tuyệt Kỹ Casio 7 ngày 7 điểm**.....113

### **Bộ Cửu Âm Chân Kinh : Thập Nhất Thần Chương**

Tâm Pháp 1 : Lượng Giác.....43

Tâm Pháp 2 : Tổ Hợp – Nhị Thức Newton.....64

Tâm Pháp 3: Tu luyện Xác Suất.....75

Tâm Pháp 4: Dãy Số - Cấp số cộng, Cấp số nhân.....96

Tâm Pháp 5: Giới Hạn – Đạo Hàm.....105

### **Bộ Cửu Dương Thần Công : Thập Nhị Đại Pháp**

#### **Tâm Pháp 1 : Hàm Số**

Tuyệt kỹ 1: Casio giải nhanh sự biến thiên.....143

Tuyệt kỹ 2: Casio hạ gục Cực trị .....160

Tuyệt kỹ 3: Casio xử nhanh Max-Min.....174

Tuyệt kỹ 4: Ứng dụng tìm giới hạn của Casio search nhanh Tiệm Cận...183

Tuyệt kỹ 5: Casio support tiếp tuyến.....190

Tuyệt kỹ 6: Kỹ thuật Casio giải toán tương giao đồ thị.....194

#### **Tâm Pháp 2: Mũ – Logarit**

Tuyệt kỹ 7: Hàm số mũ – logarit dưới sự trị vì của Casio.....202

Tuyệt kỹ 8: Casio tính, rút gọn, biểu diễn nhanh biểu thức.....213

Tuyệt kỹ 9: Kỹ thuật Calc , Solve , Table hạ gục PT-BPT Mũ – Logarit.....224

#### **Tâm Pháp 5: Nguyên Hàm – Tích Phân**

Tuyệt kỹ 10 : Casio quyết chiến với nguyên hàm.....239

Tuyệt kỹ 11: Tích phân thầm yêu Casio.....247

Tuyệt kỹ 12: Casio xử đẹp “Tích Phân chống Casio” .....254

**Tâm Pháp: Số Phức**

Tuyệt kĩ 13: Casio số phức cơ bản.....272

Tuyệt kĩ 14: Giải nhanh phương trình số phức bằng Casio.....281

Tuyệt kĩ 15: Casio hỗ trợ toán hình học số phức.....288

**Tâm Pháp : Hình Học Oxyz**

Tuyệt kĩ 16: Casio giải nhanh Oxyz.....297

**Tâm Pháp : Hình Học Không Gian**

Tuyệt Kĩ 17: Luyện tay bo giải nhanh hình học 11+12.....314

**Tâm Pháp : Toán ứng dụng.....333**Truy cập và <http://bikiptheluc.com/sach> để cập nhật thêm tuyệt kĩ và bài tập làm thêm nhé

**Lưu ý:** Trong cuốn sách cũng khá là đầy đủ Skill Casio rồi, tuy nhiên mỗi skill anh chỉ lấy 1-2 ví dụ, do đó các em nếu thấy khó hiểu thì xem kho video kèm sách để thấy các thao tác anh bấm máy và anh hướng dẫn rất nhiều ví dụ khác nữa và nhiều kĩ năng khác nữa mà sách này chưa cập nhật kịp theo xu hướng của BGD.

**Sư Phụ : Nguyễn Thế Lực***Fb.com/Ad.theluc (Anh hay chia sẻ tài liệu trên facebook này)***Youtube : MrTheLuc95****Tel: 0977.543.462 – 0968.368.653****Email: [theluc95@gmail.com](mailto:theluc95@gmail.com)****CEO at Bikiptheluc.com – Loga.vn – Luyenthipro.vn****Sở thích:** viết sách , lập trình, làm mạch.**Nghề nghiệp:** Dạy học, Code, MMO, Đào Coin,...

Họ, tên thí sinh: .....

Mã đề thi 101

Số báo danh: .....

**Câu 1.** Cho phương trình  $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ . Khi đặt  $t = 2^x$ , ta được phương trình nào dưới đây?

- A.  $2t^2 - 3 = 0$ .      B.  $t^2 + t - 3 = 0$ .      C.  $4t - 3 = 0$ .      D.  $t^2 + 2t - 3 = 0$ .

**Câu 2.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 3x$ .

A.  $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ .

B.  $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$ .

C.  $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$ .

D.  $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ .

**Câu 3.** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

- A.  $z = -2 + 3i$ .      B.  $z = 3i$ .      C.  $z = -2$ .      D.  $z = \sqrt{3} + i$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

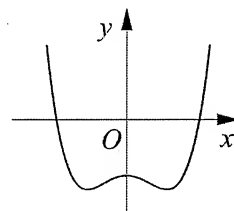
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$+\infty$			$3$			$0$		$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị.      B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.  
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.      D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

**Câu 5.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^3 + x^2 - 1$ .  
B.  $y = x^4 - x^2 - 1$ .  
C.  $y = x^3 - x^2 - 1$ .  
D.  $y = -x^4 + x^2 - 1$ .



**Câu 6.** Cho  $a$  là số thực dương khác 1. Tính  $I = \log_{\sqrt{a}} a$ .

- A.  $I = \frac{1}{2}$ .      B.  $I = 0$ .      C.  $I = -2$ .      D.  $I = 2$ .

**Câu 7.** Cho hai số phức  $z_1 = 5 - 7i$  và  $z_2 = 2 + 3i$ . Tìm số phức  $z = z_1 + z_2$ .

- A.  $z = 7 - 4i$ .      B.  $z = 2 + 5i$ .      C.  $z = -2 + 5i$ .      D.  $z = 3 - 10i$ .

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x + 2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  và nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .  
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .  
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  và đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .



**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + z - 5 = 0$ . Điểm nào dưới đây thuộc  $(P)$  ?

- A.  $Q(2; -1; 5)$ .      B.  $P(0; 0; -5)$ .      C.  $N(-5; 0; 0)$ .      D.  $M(1; 1; 6)$ .

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(Oxy)$  ?

- A.  $\vec{l} = (1; 0; 0)$ .      B.  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .      C.  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ .      D.  $\vec{m} = (1; 1; 1)$ .

**Câu 11.** Tính thể tích  $V$  của khối trụ có bán kính đáy  $r = 4$  và chiều cao  $h = 4\sqrt{2}$ .

- A.  $V = 128\pi$ .      B.  $V = 64\sqrt{2}\pi$ .      C.  $V = 32\pi$ .      D.  $V = 32\sqrt{2}\pi$ .

**Câu 12.** Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$ .

- A. 2.      B. 3.      C. 1.      D. 0.

**Câu 13.** Hàm số  $y = \frac{2}{x^2 + 1}$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A.  $(0; +\infty)$ .      B.  $(-1; 1)$ .      C.  $(-\infty; +\infty)$ .      D.  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 14.** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{2 + \cos x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu ?

- A.  $V = \pi - 1$ .      B.  $V = (\pi - 1)\pi$ .      C.  $V = (\pi + 1)\pi$ .      D.  $V = \pi + 1$ .

**Câu 15.** Với  $a, b$  là các số thực dương tùy ý và  $a$  khác 1, đặt  $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.  $P = 9\log_a b$ .      B.  $P = 27\log_a b$ .      C.  $P = 15\log_a b$ .      D.  $P = 6\log_a b$ .

**Câu 16.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$ .

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .      B.  $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$ .  
C.  $D = (-2; 3)$ .      D.  $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ .

**Câu 17.** Tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$ .

- A.  $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$ .      B.  $S = [2; 16]$ .  
C.  $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$ .      D.  $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ .

**Câu 18.** Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

- A. 4 mặt phẳng.      B. 3 mặt phẳng.      C. 6 mặt phẳng.      D. 9 mặt phẳng.

**Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $M(3; -1; 1)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$  ?

- A.  $3x - 2y + z + 12 = 0$ .      B.  $3x + 2y + z - 8 = 0$ .  
C.  $3x - 2y + z - 12 = 0$ .      D.  $x - 2y + 3z + 3 = 0$ .

**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm  $A(2; 3; 0)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P): x + 3y - z + 5 = 0$  ?

- A.  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ .

**Câu 21.** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích  $V$  của khối chóp đã cho.

- A.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ .      B.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ .      C.  $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$ .      D.  $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$ .

**Câu 22.** Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức  $1 + \sqrt{2}i$  và  $1 - \sqrt{2}i$  là nghiệm ?

- A.  $z^2 + 2z + 3 = 0$ .      B.  $z^2 - 2z - 3 = 0$ .      C.  $z^2 - 2z + 3 = 0$ .      D.  $z^2 + 2z - 3 = 0$ .

**Câu 23.** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

- A.  $m = 11$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = -2$ .      D.  $m = 3$ .

**Câu 24.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$ .

- A.  $D = (-\infty; 1)$ .      B.  $D = (1; +\infty)$ .      C.  $D = \mathbb{R}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Câu 25.** Cho  $\int_0^6 f(x)dx = 12$ . Tính  $I = \int_0^2 f(3x)dx$ .

- A.  $I = 6$ .      B.  $I = 36$ .      C.  $I = 2$ .      D.  $I = 4$ .

**Câu 26.** Tính bán kính  $R$  của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng  $2a$ .

- A.  $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ .      B.  $R = a$ .      C.  $R = 2\sqrt{3}a$ .      D.  $R = \sqrt{3}a$ .

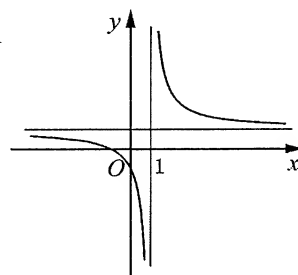
**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 3 - 5\sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.  $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$ .      B.  $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$ .  
C.  $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$ .      D.  $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$ .

**Câu 28.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  với

$a, b, c, d$  là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
B.  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
C.  $y' > 0, \forall x \neq 1$ .  
D.  $y' < 0, \forall x \neq 1$ .



**Câu 29.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm

$M(1; -2; 3)$ . Gọi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên trục  $Ox$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm  $I$ , bán kính  $IM$  ?

- A.  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ .      B.  $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ .  
C.  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$ .      D.  $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$ .

**Câu 30.** Cho số phức  $z = 1 - 2i$ . Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $w = iz$  trên mặt phẳng tọa độ ?

- A.  $Q(1; 2)$ .      B.  $N(2; 1)$ .      C.  $M(1; -2)$ .      D.  $P(-2; 1)$ .

**Câu 31.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có các cạnh đều bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón có đỉnh  $S$  và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác  $ABCD$ .

- A.  $V = \frac{\pi a^3}{2}$ .      B.  $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$ .      C.  $V = \frac{\pi a^3}{6}$ .      D.  $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ .

**Câu 32.** Cho  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

- A.  $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + 2x + C.$       B.  $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + x + C.$   
 C.  $\int f'(x)e^{2x}dx = 2x^2 - 2x + C.$       D.  $\int f'(x)e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C.$

**Câu 33.** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[2;4]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m < -1.$       B.  $3 < m \leq 4.$       C.  $m > 4.$       D.  $1 \leq m < 3.$

**Câu 34.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(-1; 1; 3)$  và hai đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$ ,  $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua  $M$ , vuông góc với  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

- A.  $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

**Câu 35.** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 13 năm.      B. 14 năm.      C. 12 năm.      D. 11 năm.

**Câu 36.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 1 + 3i - |z|i = 0$ . Tính  $S = a + 3b$ .

- A.  $S = \frac{7}{3}.$       B.  $S = -5.$       C.  $S = 5.$       D.  $S = -\frac{7}{3}.$

**Câu 37.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$

$d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$  và mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - 3z = 0$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của  $d_1$  và  $(P)$ , đồng thời vuông góc với  $d_2$ ?

- A.  $2x - y + 2z + 22 = 0.$       B.  $2x - y + 2z + 13 = 0.$   
 C.  $2x - y + 2z - 13 = 0.$       D.  $2x + y + 2z - 22 = 0.$

**Câu 38.** Cho hàm số  $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A. 7.      B. 4.      C. 6.      D. 5.

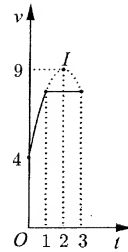
**Câu 39.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 x_2 = 81$ .

- A.  $m = -4.$       B.  $m = 4.$       C.  $m = 81.$       D.  $m = 44.$

**Câu 40.** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $AB$ ?

- A.  $P(1; 0).$       B.  $M(0; -1).$       C.  $N(1; -10).$       D.  $Q(-1; 10).$

**Câu 41.** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc  $v(\text{km/h})$  phụ thuộc thời gian  $t(\text{h})$  có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh  $I(2; 9)$  và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường  $s$  mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A.  $s = 23,25(\text{km})$ .                      B.  $s = 21,58(\text{km})$ .  
C.  $s = 15,50(\text{km})$ .                      D.  $s = 13,83(\text{km})$ .

**Câu 42.** Cho  $\log_a x = 3, \log_b x = 4$  với  $a, b$  là các số thực lớn hơn 1. Tính  $P = \log_{ab} x$ .

- A.  $P = \frac{7}{12}$ .                      B.  $P = \frac{1}{12}$ .                      C.  $P = 12$ .                      D.  $P = \frac{12}{7}$ .

**Câu 43.** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(SAB)$  một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp đã cho.

- A.  $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ .                      B.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ .                      C.  $V = \frac{2a^3}{3}$ .                      D.  $V = \sqrt{2}a^3$ .

**Câu 44.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC$  và  $E$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $D$ . Mặt phẳng  $(MNE)$  chia khối tứ diện  $ABCD$  thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh  $A$  có thể tích  $V$ . Tính  $V$ .

- A.  $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ .                      B.  $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$ .                      C.  $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ .                      D.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$ .

**Câu 45.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , điểm  $M(1; 1; 2)$  và mặt phẳng  $(P): x + y + z - 4 = 0$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $M$ , thuộc  $(P)$  và cắt  $(S)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB$  nhỏ nhất. Biết rằng  $\Delta$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u}(1; a; b)$ , tính  $T = a - b$ .

- A.  $T = -2$ .                      B.  $T = 1$ .                      C.  $T = -1$ .                      D.  $T = 0$ .

**Câu 46.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3i| = 5$  và  $\frac{z}{z - 4}$  là số thuần ảo?

- A. 0.                      B. Vô số.                      C. 1.                      D. 2.

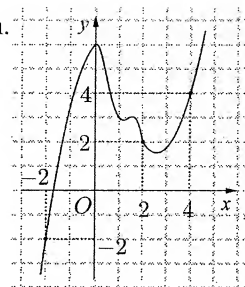
**Câu 47.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3 \frac{1 - xy}{x + 2y} = 3xy + x + 2y - 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của  $P = x + y$ .

- A.  $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} - 19}{9}$ .                      B.  $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} + 19}{9}$ .  
C.  $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11} - 29}{21}$ .                      D.  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11} - 3}{3}$ .

**Câu 48.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = mx - m + 1$  cắt đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$  tại ba điểm  $A, B, C$  phân biệt sao cho  $AB = BC$ .

- A.  $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ .                      B.  $m \in \mathbb{R}$ .  
C.  $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ .                      D.  $m \in (-2; +\infty)$ .

**Câu 49.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Đặt  $h(x) = 2f(x) - x^2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



- A.  $h(4) = h(-2) > h(2)$ .
- B.  $h(4) = h(-2) < h(2)$ .
- C.  $h(2) > h(4) > h(-2)$ .
- D.  $h(2) > h(-2) > h(4)$ .

**Câu 50.** Cho hình nón đỉnh  $S$  có chiều cao  $h = a$  và bán kính đáy  $r = 2a$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $S$  cắt đường tròn đáy tại  $A$  và  $B$  sao cho  $AB = 2\sqrt{3}a$ . Tính khoảng cách  $d$  từ tâm của đường tròn đáy đến  $(P)$ .

- A.  $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ .
- B.  $d = a$ .
- C.  $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$ .
- D.  $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ .

----- HẾT -----

## Hướng dẫn giải và đáp án

### Đáp án mã 101

1D	2B	3B	4C	5B	6D	7A	8C	9D	10B
11B	12C	13A	14C	15D	16D	17C	18B	19C	20B
21D	22C	23C	24B	25D	26D	27A	28D	29A	30B
31C	32D	33C	34D	35C	36B	37C	38A	39B	40C
41B	42D	43B	44B	45C	46C	47D	48D	49C	50D

### Đáp án mã 102

1D	2A	3B	4C	5D	6A	7A	8D	9B	10B
11A	12C	13C	14A	15D	16D	17B	18D	19B	20B
21C	22D	23C	24D	25B	26A	27D	28B	29B	30A
31D	32C	33A	34D	35B	36C	37B	38C	39D	40C
41C	42C	43B	44C	45A	46A	47A	48D	49C	50A

### Đáp án mã 103

1B	2D	3D	4C	5B	6A	7B	8D	9A	10B
11A	12C	13D	14C	15A	16C	17A	18D	19C	20C
21D	22B	23A	24A	25D	26B	27A	28D	29D	30B
31D	32B	33C	34D	35C	36A	37C	38C	39C	40A
41A	42A	43C	44B	45D	46B	47D	48D	49A	50D

### Đáp án mã 104

1C	2C	3A	4D	5A	6A	7B	8C	9B	10B
11D	12B	13C	14A	15C	16D	17D	18B	19C	20D
21B	22C	23C	24C	25A	26C	27B	28D	29D	30C
31C	32B	33C	34B	35C	36D	37B	38B	39A	40D
41D	42A	43D	44A	45B	46A	47B	48A	49B	50A

Hướng dẫn giải câu hay và khó mã đề 101:

Câu 12: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

- A. 2                      B. 3                      C. 1                      D. 0

Hướng dẫn

Bước 1: Nhập biểu thức

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$$

Bước 2: CALC số xấp xỉ nghiệm của mẫu

$$\text{CALC } 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$\text{CALC } -3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 =$$

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$$
  
0.6250000469

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$$
  
-29999999

Như vậy hàm chỉ có một tiệm cận đứng  $x = -4$

Câu 13: Hàm số  $y = \frac{2}{x^2 + 1}$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A.  $(0; +\infty)$ .                      B.  $(-1; 1)$ .                      C.  $(-\infty; +\infty)$ .                      D.  $(-\infty; 0)$ .

Hướng dẫn

Để cho nhanh chúng ta dùng d/dx

Bước 1: Nhập biểu thức

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2}{x^2 + 1} \right) \Big|_{x=}$$

Bước 2: Chọn giá trị đặc trưng của các đáp án

Xét  $x = 100$  xem A với C có khả năng đúng không ?

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2}{x^2 + 1} \right) \Big|_{x=100}$$
  
-3.99920012x10<sup>-6</sup>

Xét  $x = -100$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2}{x^2 + 1} \right) \Big|_{x=-100}$$
  
3.99920012x10<sup>-6</sup>

Vậy khoảng A loại C.

Câu 15: Với  $a, b$  là các số thực dương tùy ý và  $a$  khác 1, đặt  $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$  Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.  $P = 9\log_a b$     B.  $P = 27\log_a b$     C.  $P = 15\log_a b$     D.  $P = 6\log_a b$

Hướng dẫn

Biểu thức đúng với mọi  $a, b$  để hàm xác định nên mình sẽ chọn  $a = 2, b = 3$

**2** **SHIFT** **RCL** **(←)**

**3** **SHIFT** **RCL** **000**

2→A

3→B

**log** **□** **ALPHA** **(←)** **▶** **ALPHA** **000** **SHIFT** **x<sup>2</sup>** **▶** **+** **log** **□** **ALPHA** **(←)** **x<sup>2</sup>** **▶** **ALPHA** **000** **x<sup>□</sup>** **6** **SHIFT** **RCL** **hyp**

$\log_2(B^3) + \log_{A^2}(B)$

9.509775004

**ALPHA** **hyp** **=** **6** **log** **□** **ALPHA** **(←)** **▶** **ALPHA** **000** **=**

C-6log<sub>A</sub>(B)

□

Câu 23: Tìm giá trị  $m$  nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

- A.  $m = 11$     B.  $m = 0$     C.  $m = -2$     D.  $m = 3$

Hướng dẫn

Vào Table nhập biểu thức

**MODE** **7** **ALPHA** **)** **SHIFT** **x<sup>2</sup>** **=** **7** **ALPHA** **)** **x<sup>2</sup>** **+** **1** **1** **ALPHA** **)** **=** **2** **=**

$f(X) = X^3 - 7X^2 + 11X$

Start 0= End 2= Step 0.1=

X	F(X)
0	-2
0.1	-0.969
0.2	-0.872

-2

Các em quan sát các giá trị trong bảng thì thấy  $x = -2$  là nhỏ nhất

Câu 25: Cho  $\int_0^6 f(x)dx = 12$ . tính  $I = \int_0^2 f(3x)dx$

- A.  $I = 6$     B.  $I = 36$     C.  $I = 2$     D.  $I = 4$

Hướng dẫn



Các em chọn hàm  $f(x)$  thỏa mãn điều kiện  $\int_0^6 f(x)dx = 12$  đầu tiên là mình chọn hàm cơ bản

$$f(x) = x$$

$$\int_0^6 x dx$$

18

Sau đó thêm bớt hệ số để ra đúng KQ như đề (Chia cho KQ tích phân tính ra rồi nhân với giá trị tích phân đề cho)

$$\int_0^6 \frac{12x}{18} dx$$

12

$f(3x)$  thì các em thay  $x$  thành  $3x$

$$\int_0^2 \frac{12(3x)}{18} dx$$

4

Vậy khoanh đáp án D.

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 3 - 5\sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$

B.  $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$

C.  $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$

D.  $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$

**Hướng dẫn**

Ta có  $f(0) = 10$  nên loại B, C kiểm tra đạo hàm nữa là xong khoanh A

**Câu 32:** Cho  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$

A.  $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$

B.  $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + x + C$

C.  $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$

D.  $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$

**Hướng dẫn**

Các em dùng nguyên hàm từng phần

$$\int f(x)e^{2x} dx = x^2 + C \rightarrow f(x) = \frac{2x}{e^{2x}} \Rightarrow \int f'(x)e^{2x} dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} dx = 2x - 2x^2 + C$$

**Câu 33:** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{x \in [2;4]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $m < -1$

B.  $3 < m \leq 4$

C.  $m > 4$

D.  $1 \leq m < 3$

**Hướng dẫn**

Chúng ta sẽ chọn  $m$  gần đúng trong từng đoạn trước hết phải xét đáp án B, D khi đó  $m$  nó chỉ xấp xỉ thôi

Với  $m=3.5$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 20 & \times & 3.5 & 4 \\ \hline 21 & & & \\ \hline 22 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline F(X) \\ \hline 2.5517 \\ \hline 2.5517 \\ \hline 2.5517 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Math \\ \hline 2.5 \\ \hline 2.5 \\ \hline 2.5 \\ \hline \end{array}$$

Với  $m=4$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 20 & \times & 4 & 4 \\ \hline 21 & & & \\ \hline 22 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline F(X) \\ \hline 2.7241 \\ \hline 2.7241 \\ \hline 2.7241 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Math \\ \hline 8.3 \\ \hline 8.3 \\ \hline 8.3 \\ \hline \end{array}$$

Với  $m=5$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 20 & \times & 5 & 4 \\ \hline 21 & & & \\ \hline 22 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline F(X) \\ \hline 3.0689 \\ \hline 3.0689 \\ \hline 3.0689 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Math \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Vậy các em khoanh C

Tự Luận:

$$\text{Ta có } y' = \frac{-1-m^2}{(x-1)^2} = -\frac{m^2+1}{(x-1)^2} < 0 \text{ do đó } x \in [2;4] \rightarrow \min_{f(x)} = 3 \Leftrightarrow x = 4 \rightarrow \frac{4+m}{4-1} = 3 \Rightarrow m = 5$$

Câu 35: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 13 năm. B. 14 năm. C. 12 năm. D. 11 năm.

Hướng dẫn

Nhập biểu thức rồi CALC các đáp án

$\boxed{5} \boxed{0} \boxed{(} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{0} \boxed{6} \boxed{)} \boxed{x^y} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{Math}} \boxed{\blacktriangle}$

$$50(1+0.06)^x$$

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=}$

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{=}$

$$50(1+0.06)^x$$

$$50(1+0.06)^x$$

$$94.91492792$$

$$100.6098236$$

Vậy khoanh C

Câu 36: Cho số phức  $z = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 1 + 3i - |z|i = 0$ . Tính  $S = a + 3b$

- A.  $S = \frac{7}{3}$  B.  $S = -5$  C.  $S = 5$  D.  $S = -\frac{7}{3}$

Hướng dẫn

Các em dùng kĩ thuật Newton – Raphson anh đã dạy ở cuốn Casio nâng cao giải cho nhanh

$\boxed{\text{MODE}} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{=} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\text{ENG}} \boxed{-} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\text{ENG}}$

$\boxed{\blacktriangledown} \boxed{1}$

$$X = X - \frac{\text{CMPLX } X + 1 + 3i - |X|i}{1}$$

CALC 1 + ENG

Liên hoàn bằng tới khi kết quả không đổi ta được

$$X = X - \frac{X+1+3i-|X|i}{1}$$

$$-1-1.333333333i$$

Vậy  $a = -1, b = -\frac{4}{3} \Rightarrow S = -5$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng  $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$  và

$d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$  mặt phẳng (P):  $2x + 2y - 3z = 0$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của  $d_1$  và (P), đồng thời vuông góc với  $d_2$ ?

A.  $2x - y + 2z + 22 = 0$

B.  $2x - y + 2z + 13 = 0$

C.  $2x - y + 2z - 13 = 0$

D.  $2x + y + 2z - 22 = 0$

Hướng dẫn

Các em tìm nhanh giao điểm bằng Solve

2 ( 1 + 3X ) + 2 ( -2 + X ) = 0

$$X = \frac{1}{3}$$

$$L - R = 0$$

$M(4, -1, 2) \rightarrow (Q): 2(x-4) - (y+1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 13 = 0$

Câu 38: Cho hàm số  $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$  với  $m$  tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

A. 7

B. 4

C. 6

D. 5

Hướng dẫn

Dạng này các em dùng công thức cho nhanh

Hàm bậc 3 đồng biến trên R:  $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$  nghịch biến trên R:  $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow m^2 - 3(-1)(4m+9) \leq 0 \rightarrow -9 \leq x \leq -3$  Vậy khoanh A

Câu 39: Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\log_2^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 x_2 = 81$

A.  $m = -4$

B.  $m = 4$

C.  $m = 81$

D.  $m = 44$

Hướng dẫn

Cách 1: Thay từng đáp án rồi Solve tìm nghiệm

log 2 3 ( ALPHA ) ( ) ( ) + 2 ( ALPHA ) ( S+D ) - 7

Math ▲

$$4Y\log_3(X)+2Y-7$$

SHIFT CALC [=] 4 [=] [=] ◀ [=] RCL ) SHIFT RCL (←

Math ▲

$$\log_3(X) \leftarrow -Y\log_3(4)$$

Ans→A

X= 13.34998641

L-R= 0 13.34998641

▲ ▲ ◀ ▶ ◀ ▶ ÷ ( ALPHA ) = ALPHA (← )

Math ▲

$$(4Y+2Y-7) \div (X-A)$$

SHIFT CALC [=] [=] [=] ALPHA (←) ALPHA ) [=]

Math ▲

$$\log_3(X) \leftarrow -Y\log_3(4)$$

AX

X= 9.247709

L-R= 0  $\frac{1}{81}$

Xét đáp án B

▲ ▲ ▲ ◀ SHIFT CALC 4 [=] [=]

Math ▲

$$4Y\log_3(X)+2Y-7$$

Math ▲

$$\log_3(X) \leftarrow -Y\log_3(4)$$

X= 1.34228351

L-R= 0

Math ▲

$$\log_3(X) \leftarrow -Y\log_3(4)$$

X= 60.34492668

L-R= 0

XA

81

Vậy khoanh đáp án A.

Cách 2: Tự luận các em tư duy đơn giản như sau :

$$x_1x_2 = 81 \rightarrow \log_3(x_1x_2) = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(3^4) = 4 = m$$

Câu 40: Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

- A.  $P(1;0)$       B.  $M(0;-1)$       C.  $N(1;-10)$       D.  $Q(-1;10)$

Hướng dẫn

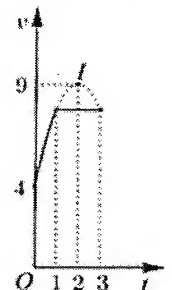
Các em viết nhanh phương trình qua 2 cực trị bằng Casio :

$$X^3 - 3X^2 - 9X + 1 - \frac{(3x^2 - 6x - 9)}{18} \left( +1 - \frac{(3x^2 - 6x - 9)}{18} \right) \left( \frac{2 - 6x - 9}{18} (6x - 6) \right)$$

$$X^3 - 3X^2 - 9X + 1 - \frac{(3x^2 - 6x - 9)}{18} \left( +1 - \frac{(3x^2 - 6x - 9)}{18} \right) \left( \frac{2 - 6x - 9}{18} (6x - 6) \right)$$

Vậy phương trình qua 2 cực trị là :  $y = -8x - 2$  Vậy khoanh C

**Câu 41:** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc  $v$  (km/h) phụ thuộc thời gian  $t$  (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh  $I(2;9)$  và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường  $s$  mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A.  $s = 23,25(km)$  B.  $s = 21,58(km)$  C.  $s = 15,50(km)$  D.  $s = 13,83(km)$

### Hướng dẫn

Trước hết các em cần các định được phương trình của vận tốc trên từng đoạn.

Đoạn từ 0-1 chính là 1 phần của parabol :  $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{ta có } A(0;4) \in (P) \Rightarrow c=4 \text{ và } I(2;9) \text{ là đỉnh} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{-5}{4}, b=5, c=4$$

$$\text{Vậy } v = \frac{-5}{4}t^2 + 5t + 4 \rightarrow v(1) = \frac{31}{4} \quad S = \int_0^1 \left( \frac{-5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \frac{31}{4}(3-1)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{-5}{4}X^2 + 5X + 4 \right) dX = 21.58(3)$$

**Câu 42:** Cho  $\log_a x = 3, \log_b x = 4$  với  $a, b$  là các số thực lớn hơn 1. Tính  $P = \log_{ab} x$

A.  $P = \frac{7}{12}$  B.  $P = \frac{1}{12}$  C.  $P = 12$  D.  $P = \frac{12}{7}$

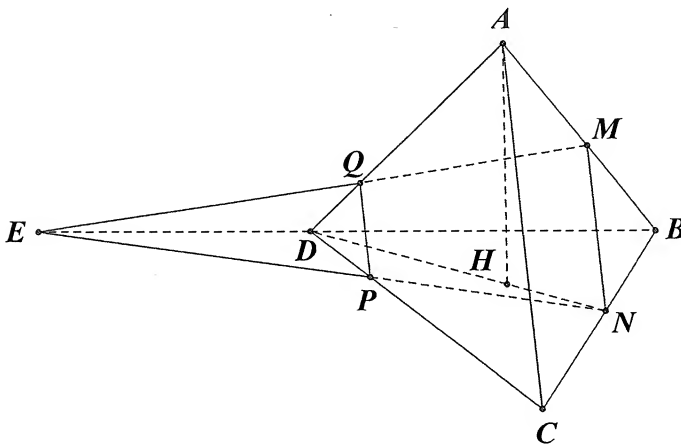
**Hướng dẫn :** Để cho nhanh em lấy  $x = 2$  khi đó  $a = \sqrt[3]{2}, b = \sqrt[4]{2}$

$$\log_{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}}(2) = \frac{12}{7}$$

Câu 44: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện ABCD thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A.  $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$     B.  $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$     C.  $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$     D.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$

Hướng dẫn : Cho a=1



Các em tư duy đơn giản như sau :  $V = V_{AC.MNPQ} = V_{ABCD} - V_{DQP.BMN} = V_{ABCD} - (V_{E.BMN} - V_{E.DQP})$

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Ta có :  $V_{E.DQP} = \frac{1}{3} d_{E \rightarrow (DQP)} \cdot S_{DQP}$  mà  $d_{E \rightarrow (DQP)} = d_{B \rightarrow (DQP)} = d_{B \rightarrow (ADC)} = AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Các em dễ dàng chứng minh được DQP và BMN là tam giác đều quan trọng là tính diện tích nữa là xong mình sẽ xem xét các tỉ lệ.

$$EM = \sqrt{MB^2 + EB^2 - 2MB \cdot EB \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{MB}{\sin QED} = \frac{EM}{\sin MBE} \rightarrow \sin QED = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,5 : \frac{\sqrt{13}}{2} \rightarrow QED \approx 13.9^\circ \rightarrow EQD = 180 - 120 - 13.9 = 46.1^\circ$$

Anh ghi thì ghi thế thôi nhưng thực tế anh lưu giá trị chính xác vào các phím nhớ để đảm bảo kết quả chính xác tuyệt đối



Vậy  $\bar{u} = (1; -1; 0) \rightarrow a - b = -1$

Câu 46: Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3i| = 5$  và  $\frac{z}{z-4}$  là số thuần ảo ?

- A. 0                      B. Vô số                      C. 1                      D. 2

Hướng dẫn

Mình làm theo cách trâu bò gọi  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

$$|z - 3i| = 5 \Leftrightarrow a^2 + (b - 3)^2 = 25$$

$$\frac{z}{z-4} = \frac{a+bi}{(a-4)+bi} = \frac{(a+bi)[(a-4)-bi]}{(a-4)^2+b^2} = \frac{a(a-4)+b^2}{(a-4)^2+b^2} + \frac{(a-4)b-ab}{(a-4)^2+b^2}i$$

$$\Rightarrow a(a-4)+b^2=0$$

$$\begin{cases} a^2 + (b-3)^2 = 25 \\ a^2 - 4a + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-3)^2 = 25 \\ 4a - 6b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-3)^2 = 25 \\ b = \frac{2a-8}{3} \end{cases} \Rightarrow a=4, a=\frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{array}{l} X^2 + (\frac{2a-8}{3} - 3)^2 - 25 \\ X = 4 \quad X = 1.230769231 \\ L-R = 0 \quad L-R = 0 \end{array}$$

Vậy khoanh D.

Câu 47: Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$ . Tìm giá trị nhỏ

nhất  $P_{\min}$  của  $P = x + y$

- A.  $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$     B.  $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$     C.  $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$     D.  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$

Hướng dẫn : Điều kiện  $\frac{1-xy}{x+2y}$  mà  $x, y > 0 \rightarrow xy < 1$

Đầu tiên các em xử lý điều kiện xem  $x$  và  $y$  có mối liên hệ nào không ?

Bước 1: Nhập biểu thức

$$\log_3 \left( \frac{1-XY}{X+2Y} \right) - (3XY + X + 2Y - 4)$$

Bước 2: SOLVE Y=100 tìm X

$$\text{SHIFT} \text{ [CALC] } [1] [0] [0] [=] [=]$$



$$1093 \left( \frac{1}{x+2y} \right) - (3x) \quad \text{Math} \quad \Delta$$

$$X = -0.654485049 \quad \text{Math} \quad \Delta$$

$$L-R = 0 \quad \text{Math} \quad \Delta$$

Các em được quy luật sau :  $x = -\frac{197}{301} = -\frac{2.100-3}{3.100+1} = -\frac{2y-3}{3y+1}$

Bước 3: Xét  $P = y - \frac{2y-3}{3y+1}$  vào Table

$$\text{MODE} \quad 7 \quad \text{ALPHA} \quad \text{)} \quad \text{Math} \quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad \text{)} \quad \text{Math} \quad 3 \quad \text{Math} \quad 3 \quad \text{ALPHA} \quad \text{)} \quad \text{Math} \quad + \quad 1$$

$$f(X) = X - \frac{2X-3}{3X+1}$$

$$\text{MODE} \quad 0 \quad \text{Math} \quad 6 \quad \text{Math} \quad 0 \quad \text{Math} \quad . \quad \text{Math} \quad 2 \quad \text{Math} \quad 5 \quad \text{Math}$$

X	F(X)
0.5	1.211538462
0.75	1.211538462
1	1.211538462
1.25	1.211538462

Chúng ta sẽ xét nhỏ hơn hơn vì đáp án khá gần nhau khi mà đã xác định được đoạn chứa min

$$\text{MODE} \quad 0 \quad \text{Math} \quad . \quad \text{Math} \quad 5 \quad \text{Math} \quad 1 \quad \text{Math} \quad 0 \quad \text{Math} \quad . \quad \text{Math} \quad 0 \quad \text{Math} \quad 5 \quad \text{Math}$$

X	F(X)
0.7	1.211538462
0.75	1.211538462
0.8	1.211538462

Vậy các em khoanh đáp án  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3} \approx 1.211$  gần nhất

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = mx - m + 1$  cắt đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$  tại ba điểm  $A, B, C$  phân biệt sao cho  $AB = BC$

- A.  $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$     B.  $m \in \mathbb{R}$     C.  $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$     D.  $m \in (-2; +\infty)$

Hướng dẫn

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1 - m) = 0 \Rightarrow B(1; 1)$$

$$\Delta' = 2 + m > 0 \rightarrow m > -2$$

$$AB = BC \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (mx_1 - m)^2 = (x_2 - 1)^2 + (mx_2 - m)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 [1 + m^2] = (x_2 - 1)^2 [1 + m^2] \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow x_1 - 1 = 1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$$

Theo Viet :  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -(m+1) \end{cases}$  Vậy  $AB=BC$  với mọi  $m > -2$

Casio các em xét phương trình bậc 3:

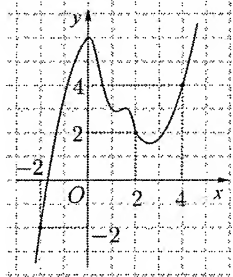
$$y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x + 1 + m$$

Rồi xét  $m = -10$  ra 3 nghiệm kiểm tra xem  $AB=BC$  ? rồi xét tiếp  $m = -1.9$  xem  $AB=BC$  hay không.

**Câu 49:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên.

Đặt  $h(x) = 2f(x) - x^2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

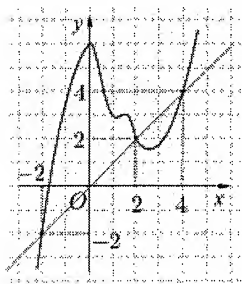
- A.  $h(4) = h(-2) > h(2)$ .
- B.  $h(4) = h(-2) < h(2)$ .
- C.  $h(2) > h(4) > h(-2)$ .
- D.  $h(2) > h(-2) > h(4)$ .



**Hướng dẫn**

Các em đạo hàm để sinh ra  $f'(x)$  để từ đó sử dụng đồ thị  $y = f'(x)$

$$h'(x) = 2f'(x) - 2x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \text{ dựa vào đồ thị ta có :}$$



Xét trên đoạn  $[2; 4]$  :  $x > f'(x) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow$  hàm số nghịch biến nên  $h(2) > h(4)$ . Giờ ta cần so  $h(-2)$  với  $h(4)$

$$\begin{aligned} h(4) - h(-2) &= \int_{-2}^4 h'(x) dx = 2 \int_{-2}^4 [f'(x) - x] dx \\ &= 2 \left( \int_{-2}^2 [f'(x) - x] dx + \int_2^4 [f'(x) - x] dx \right) = 2(S_1 - S_2) \end{aligned}$$

Với  $S_1, S_2$  lần lượt là diện tích các phần giới hạn bởi 2 đồ thị  $y = f'(x)$  và  $y = x$  tương ứng trên các đoạn.

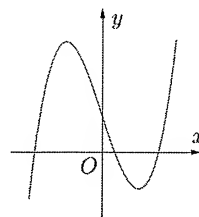
**Câu 1.** Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A.  $y = -x^2 + x - 1$ .

B.  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

C.  $y = x^4 - x^2 + 1$ .

D.  $y = x^3 - 3x + 1$ .



**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 1$  và  $y = -1$ .

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $x = 1$  và  $x = -1$ .

**Câu 3.** Hỏi hàm số  $y = 2x^4 + 1$  đồng biến trên khoảng nào ?

A.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ .

B.  $(0; +\infty)$ .

C.  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

D.  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên :

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$y'$	+		-	0	+
$y$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

**Câu 5.** Tìm giá trị cực đại  $y_{CD}$  của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$ .

A.  $y_{CD} = 4$ .

B.  $y_{CD} = 1$ .

C.  $y_{CD} = 0$ .

D.  $y_{CD} = -1$ .

**Câu 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$  trên đoạn  $[2; 4]$ .

- A.  $\min_{[2; 4]} y = 6$ .      B.  $\min_{[2; 4]} y = -2$ .      C.  $\min_{[2; 4]} y = -3$ .      D.  $\min_{[2; 4]} y = \frac{19}{3}$ .

**Câu 7.** Biết rằng đường thẳng  $y = -2x + 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + x + 2$  tại điểm duy nhất; kí hiệu  $(x_0; y_0)$  là tọa độ của điểm đó. Tìm  $y_0$ .

- A.  $y_0 = 4$ .      B.  $y_0 = 0$ .      C.  $y_0 = 2$ .      D.  $y_0 = -1$ .

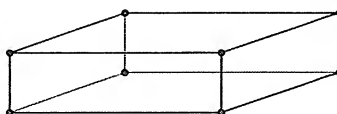
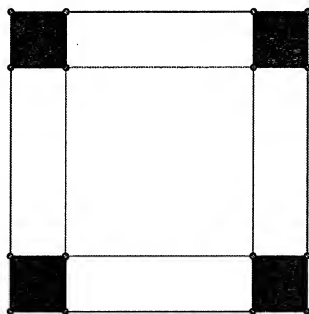
**Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A.  $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ .      D.  $m = 1$ .

**Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$  có hai tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị thực nào của  $m$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.      B.  $m < 0$ .  
C.  $m = 0$ .      D.  $m > 0$ .

**Câu 10.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A.  $x = 6$ .      B.  $x = 3$ .      C.  $x = 2$ .      D.  $x = 4$ .

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$  đồng

biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $m \leq 0$  hoặc  $1 \leq m < 2$ .      B.  $m \leq 0$ .      C.  $1 \leq m < 2$ .      D.  $m \geq 2$ .

**Câu 12.** Giải phương trình  $\log_4(x - 1) = 3$ .

- A.  $x = 63$ .      B.  $x = 65$ .      C.  $x = 80$ .      D.  $x = 82$ .

**Câu 13.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 13^x$ .

- A.  $y' = x \cdot 13^{x-1}$ .      B.  $y' = 13^x \cdot \ln 13$ .      C.  $y' = 13^x$ .      D.  $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$ .

**Câu 14.** Giải bất phương trình  $\log_2(3x - 1) > 3$ .

- A.  $x > 3$ .      B.  $\frac{1}{3} < x < 3$ .      C.  $x < 3$ .      D.  $x > \frac{10}{3}$ .

**Câu 15.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ .

- A.  $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ .      B.  $\mathcal{D} = [-1; 3]$ .  
C.  $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ .      D.  $\mathcal{D} = (-1; 3)$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai ?

- A.  $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$ .  
B.  $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$ .  
C.  $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$ .  
D.  $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$ .

**Câu 17.** Cho các số thực dương  $a, b$ , với  $a \neq 1$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A.  $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} \log_a b$ .      B.  $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2 \log_a b$ .  
C.  $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b$ .      D.  $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$ .

**Câu 18.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{x+1}{4^x}$ .

- A.  $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ .      B.  $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ .  
C.  $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ .      D.  $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ .

**Câu 19.** Đặt  $a = \log_2 3$ ,  $b = \log_5 3$ . Hãy biểu diễn  $\log_6 45$  theo  $a$  và  $b$ .

- A.  $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$ .      B.  $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$ .  
C.  $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$ .      D.  $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$ .

**Câu 20.** Cho hai số thực  $a$  và  $b$ , với  $1 < a < b$ . Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

- A.  $\log_a b < 1 < \log_b a$ .      B.  $1 < \log_a b < \log_b a$ .  
C.  $\log_b a < \log_a b < 1$ .      D.  $\log_b a < 1 < \log_a b$ .

**Câu 21.** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền  $m$  mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A.  $m = \frac{100.(1,01)^3}{3}$  (triệu đồng).

B.  $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$  (triệu đồng).

C.  $m = \frac{100 \times 1,03}{3}$  (triệu đồng).

D.  $m = \frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$  (triệu đồng).

**Câu 22.** Viết công thức tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ), xung quanh trục  $Ox$ .

A.  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

B.  $V = \int_a^b f^2(x) dx$ .

C.  $V = \pi \int_a^b f(x) dx$ .

D.  $V = \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Câu 23.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$ .

**Câu 24.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 10$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

A. 0,2m.

B. 2m.

C. 10m.

D. 20m.

**Câu 25.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$ .

A.  $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ .

B.  $I = -\pi^4$ .

C.  $I = 0$ .

D.  $I = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 26.** Tính tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$ .

A.  $I = \frac{1}{2}$ .

B.  $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ .

C.  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

D.  $I = \frac{e^2 - 1}{4}$ .

**Câu 27.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^3 - x$  và đồ thị hàm số  $y = x - x^2$ .

A.  $\frac{37}{12}$ .

B.  $\frac{9}{4}$ .

C.  $\frac{81}{12}$ .

D. 13.

**Câu 28.** Kí hiệu  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2(x-1)e^x$ , trục tung và trục hoành. Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay thu được khi quay hình  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ .

A.  $V = 4 - 2e$ .

B.  $V = (4 - 2e)\pi$ .

C.  $V = e^2 - 5$ .

D.  $V = (e^2 - 5)\pi$ .

**Câu 29.** Cho số phức  $z = 3 - 2i$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $\bar{z}$ .

A. Phần thực bằng  $-3$  và Phần ảo bằng  $-2i$ .B. Phần thực bằng  $-3$  và Phần ảo bằng  $-2$ .C. Phần thực bằng  $3$  và Phần ảo bằng  $2i$ .D. Phần thực bằng  $3$  và Phần ảo bằng  $2$ .

**Câu 30.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Tính môđun của số phức  $z_1 + z_2$ .

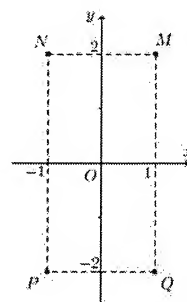
A.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ .

B.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ .

C.  $|z_1 + z_2| = 1$ .

D.  $|z_1 + z_2| = 5$ .

**Câu 31.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+i)z = 3-i$ . Hỏi điểm biểu diễn của  $z$  là điểm nào trong các điểm  $M, N, P, Q$  ở hình bên?

A. Điểm  $P$ .B. Điểm  $Q$ .C. Điểm  $M$ .D. Điểm  $N$ .

**Câu 32.** Cho số phức  $z = 2 + 5i$ . Tìm số phức  $w = iz + \bar{z}$ .

A.  $w = 7 - 3i$ .

B.  $w = -3 - 3i$ .

C.  $w = 3 + 7i$ .

D.  $w = -7 - 7i$ .

**Câu 33.** Kí hiệu  $z_1, z_2, z_3$  và  $z_4$  là bốn nghiệm phức của phương trình  $z^4 - z^2 - 12 = 0$ . Tính tổng  $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ .

A.  $T = 4$ .

B.  $T = 2\sqrt{3}$ .

C.  $T = 4 + 2\sqrt{3}$ .

D.  $T = 2 + 2\sqrt{3}$ .

**Câu 34.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 4$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = (3 + 4i)z + i$  là một đường tròn. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đó.

A.  $r = 4$ .

B.  $r = 5$ .

C.  $r = 20$ .

D.  $r = 22$ .

**Câu 35.** Tính thể tích  $V$  của khối lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết  $AC' = a\sqrt{3}$ .

A.  $V = a^3$ .

B.  $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ .

C.  $V = 3\sqrt{3}a^3$ .

D.  $V = \frac{1}{3}a^3$ .

**Câu 36.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = \sqrt{2}a$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABCD$ .

$$A. V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$

$$B. V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}.$$

$$C. V = \sqrt{2}a^3.$$

$$D. V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

**Câu 37.** Cho tứ diện  $ABCD$  có các cạnh  $AB, AC$  và  $AD$  đôi một vuông góc với nhau;  $AB = 6a$ ,  $AC = 7a$  và  $AD = 4a$ . Gọi  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $BC, CD, DB$ . Tính thể tích  $V$  của tứ diện  $AMNP$ .

$$A. V = \frac{7}{2}a^3.$$

$$B. V = 14a^3.$$

$$C. V = \frac{28}{3}a^3.$$

$$D. V = 7a^3.$$

**Câu 38.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $\sqrt{2}a$ . Tam giác  $SAD$  cân tại  $S$  và mặt bên  $(SAD)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\frac{4}{3}a^3$ . Tính khoảng cách  $h$  từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

$$A. h = \frac{2}{3}a.$$

$$B. h = \frac{4}{3}a.$$

$$C. h = \frac{8}{3}a.$$

$$D. h = \frac{3}{4}a.$$

**Câu 39.** Trong không gian, cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$  và  $AC = \sqrt{3}a$ . Tính độ dài đường sinh  $l$  của hình nón, nhận được khi quay tam giác  $ABC$  xung quanh trục  $AB$ .

$$A. l = a.$$

$$B. l = \sqrt{2}a.$$

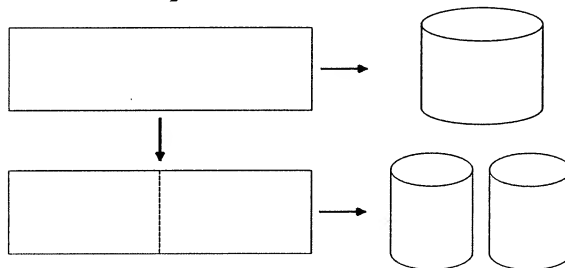
$$C. l = \sqrt{3}a.$$

$$D. l = 2a.$$

**Câu 40.** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước  $50\text{cm} \times 240\text{cm}$ , người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng  $50\text{cm}$ , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây) :

- Cách 1 : Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2 : Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu  $V_1$  là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và  $V_2$  là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ .



$$A. \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

$$B. \frac{V_1}{V_2} = 1.$$

$$C. \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

$$D. \frac{V_1}{V_2} = 4.$$

**Câu 41.** Trong không gian, cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 1$  và  $AD = 2$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục  $MN$ , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần  $S_p$  của hình trụ đó.

$$A. S_p = 4\pi.$$

$$B. S_p = 2\pi.$$

$$C. S_p = 6\pi.$$

$$D. S_p = 10\pi.$$



**Câu 42.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích  $V$  của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A.  $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ .      B.  $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ .      C.  $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ .      D.  $V = \frac{5\pi}{3}$ .

**Câu 43.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P) : 3x - z + 2 = 0$ . Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của  $(P)$  ?

A.  $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$ .      B.  $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$ .      C.  $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$ .      D.  $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$ .

**Câu 44.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu

$$(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

Tìm tọa độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của  $(S)$ .

A.  $I(-1; 2; 1)$  và  $R = 3$ .      B.  $I(1; -2; -1)$  và  $R = 3$ .  
C.  $I(-1; 2; 1)$  và  $R = 9$ .      D.  $I(1; -2; -1)$  và  $R = 9$ .

**Câu 45.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P) : 3x + 4y + 2z + 4 = 0$  và điểm  $A(1; -2; 3)$ . Tính khoảng cách  $d$  từ  $A$  đến  $(P)$ .

A.  $d = \frac{5}{9}$ .      B.  $d = \frac{5}{29}$ .      C.  $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$ .      D.  $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình :

$$\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

Xét mặt phẳng  $(P) : 10x + 2y + mz + 11 = 0$ ,  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ .

A.  $m = -2$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = -52$ .      D.  $m = 52$ .

**Câu 47.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 1; 1)$  và  $B(1; 2; 3)$ . Viết phương trình của mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$ .

A.  $x + y + 2z - 3 = 0$ .      B.  $x + y + 2z - 6 = 0$ .  
C.  $x + 3y + 4z - 7 = 0$ .      D.  $x + 3y + 4z - 26 = 0$ .

**Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(2; 1; 1)$  và mặt phẳng  $(P) : 2x + y + 2z + 2 = 0$ . Biết mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu  $(S)$ .

A.  $(S) : (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ .  
B.  $(S) : (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$ .  
C.  $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ .  
D.  $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ .

**Câu 49.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 0; 2)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình :  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$ , vuông góc và cắt  $d$ .

A.  $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ .

B.  $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ .

C.  $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ .

D.  $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$ .

**Câu 50.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(1; -2; 0)$ ,  $B(0; -1; 1)$ ,  $C(2; 1; -1)$  và  $D(3; 1; 4)$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó ?

A. 1 mặt phẳng.    B. 4 mặt phẳng.    C. 7 mặt phẳng.    D. Có vô số mặt phẳng.

----- HẾT -----

### Đáp án

1.D	2.C	3.B	4.D	5.A	6.A	7.C	8.B	9.D	10.C
11.A	12.B	13.B	14.A	15.C	16.D	17.D	18.A	19.C	20.D
21.B	22.A	23.B	24.C	25.C	26.C	27.A	28.D	29.D	30.A
31.B	32.B	33.C	34.C	35.A	36.D	37.D	38.B	39.D	40.C
41.A	42.B	43.D	44.A	45.C	46.B	47.A	48.D	49.B	50.C

Giải một số câu khó:

Câu 6:

Các bạn tính  $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3 \Rightarrow$  tính ra A.

Hoặc Các bạn dùng Table với Start 2=, End 3.9= và Step 0.1=

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Math

10	2.9	F(x)	Math
11	3.1	6.0047	Math
12			

Step? 0.1

Ở đây Table chỉ tính được 20 giá trị lên anh để 3.9, các bạn tính thêm giá trị tại 4 nữa và so sánh nhé

Câu 8:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 1 \\ x = \pm\sqrt{-m} \rightarrow y = 1 - m^2 \end{cases}$$

$$\overline{AB.AC} = 0 \Rightarrow m = -1 \rightarrow B$$

Câu 9:

Vì x có thể là  $\pm\infty$  nên loại B,  $m = 0 \rightarrow y = x + 1 \rightarrow$  loại C

Với  $m > 0$  thì:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{m}}$$

Do đó chọn D.

### Câu 10:

Bài này thực chất là một bài hàm số mà thôi. Đầu tiên các bạn nhớ cho thầy công thức tính diện tích hình hộp  $V = (12-2x)^2 x$ . Bài toán trở về bài toán là tìm  $x$  để  $V$  max.

Ta tính  $y' = 0 \Rightarrow x = 6$  hoặc  $x = 2 \Rightarrow C$ .

**Casio:** các bạn tìm Max của hàm số trên bằng Table

Start 2=, End 6=, Step 1=

Table mode results:

X	f(X)
2	128
3	108
4	64
5	18
6	0

### Câu 11:

**Casio:** chuyển sang hệ radian :  $\text{SHIFT} \text{MODE} 4$

Calculator settings:  $\text{SHIFT} \text{MODE} 4 \text{ SHIFT } \frac{\pi}{2} \text{ tan } \text{ALPHA } ( ) \text{ ) } - 2 \text{ tan } \text{ALPHA } ( ) \text{ ) } - 100 \text{ 0 0 1}$

Thử với  $m=100$

Derivative calculation for  $m=100$ :

$$\left. \frac{d}{dx} \left( \frac{\tan(x)-2}{\tan(x)-100} \right) \right|_{x=0.1} = -0.003571$$

Do đó Loại D, thử với  $m=-100$

Derivative calculation for  $m=-100$ :

$$\left. \frac{d}{dx} \left( \frac{\tan(x)-2}{\tan(x)+100} \right) \right|_{x=0.1} = 0.01028204062$$

Loại C, chỉ còn B hoặc A, thử với  $m=1$

$$\left. \frac{\tan(x)-2}{\tan(x)-1} \right|_{x=0.1} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\tan(x)-2}{\tan(x)-1} \right) \Big|_{x=0.1} = 1.247924282$$

Vậy A đúng.

Câu 12:

$$\log_4(X-1)-3$$

$$X=65$$

$$L-R=0$$

Câu 13.

casio

$$1 \rightarrow X$$

$$\frac{d}{dx}(13^x) \Big|_{x=1} - (X \times 13^x - 1) \Big|_{x=1} = 32.34434165$$

Do đó loại A

$$\frac{d}{dx}(13^x \ln(13)) \Big|_{x=1} - (13^x) \Big|_{x=1} = 0$$

Câu 14.

Casio :

$$\log_2(3X-1)-3$$

Các bạn tính CALC :

$$X? \quad \log_2(3X-1)-3$$

100      5.224001674

Đáp án đúng là A

Câu 18.

Casio:

$$1 \div X \quad \left| \frac{1-2(X+1)}{2^{2X}} \right|_{x=1} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{X+1}{4^X} \right) \Big|_{x=1} \quad -\frac{1-2}{4}$$

1      0°0'0"

Câu 21. Các bạn xem hướng dẫn chi tiết ở video kèm sách nhé

$$K(101-X) \times 1.01 - X \quad \leftarrow 1.01 - X \times 1.01 - X$$

$$((101-X) \times 1.01 - X) \\ X = 34.00221115 \\ L-R = 0$$

Các bạn so kết quả này với các đáp án và chọn B

Câu 23.

$$\text{Hướng dẫn } \int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1}$$

Casio : Ở đây thay vì tính nguyên hàm thì các bạn tính tích phân từ  $\frac{1}{2} \rightarrow 1$

(Xem ở mục Casio Skill 1.0 và 2.0 nhé)

**Câu 24.**

**Giải theo vật lí lớp 10:**

$$v^2 - v_0^2 = 2as \rightarrow s = \frac{-v_0^2}{2a} \quad (v = 0)$$

$$a = v'(t) = -5 \rightarrow s = 10$$

Casio: Các bạn dùng tích phân:  $v = 0 \rightarrow t = 2$

Gợi ý:  $\Delta s = v \cdot \Delta t \rightarrow s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

Math ▲

$$\int_0^2 (-5x + 10) dx$$

10

**Câu 25:**

Math ▲

$$\int_0^\pi \cos(x)^3 \sin(x) dx$$

0

**Câu 26.**

Math ▲

$$\int_1^e x \ln(x) dx - \frac{e^2}{4}$$

0.25

**Câu 27.**

Dạng này thì các bạn chia khoảng để xét dấu.

Cho phương trình hoành độ giao điểm tìm ra:  $x = 0, x = -2, x = 1$

Tính máy tính  $\Rightarrow$  ta được đáp A.

$$\begin{aligned} & \left( (X^3 - X) - (X - X^2) \right) \Big|_{X=-2}^1 = \frac{1}{0} \\ & \left( (X^3 - X) - (X - X^2) \right) \Big|_{X=0}^1 = \frac{0}{0} \\ & \left( (X^3 - X) - (X - X^2) \right) \Big|_{X=-2}^0 = \frac{-2}{0} \\ & \int_{-2}^0 |X^3 - 2X + X^2| dx + \int_0^1 |X^3 - 2X + X^2| dx + \int_{-2}^0 |X^3 - 2X + X^2| dx = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

Câu 28.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 4(x-1)^2 e^{2x} dx = 2.389056099 \\ & \text{Ans} \rightarrow A = 2.389056099 \\ & A - e^2 = -5 \end{aligned}$$

Câu 33.

Tính ngay ra  $z^2 = 4, z^2 = -3 \Rightarrow$  tính tiếp  $z_1 = 2, z_2 = -2, z_3 = \sqrt{3}i, z_4 = -\sqrt{3}i$

Câu 34.

Casio:

3 điểm xác định 1 đường tròn các bạn có thể chọn bừa 3 số  $z$  nhưng anh chỉ cần chọn 2 là nhìn ra rồi ^^

(anh lười mà :D)

$$\begin{cases} z = 4 \rightarrow w = 12 + 17i \\ z = -4 \rightarrow w = -12 - 15i \end{cases} \rightarrow r = (12-a)^2 + (17-b)^2 = (-12-a)^2 + (-15-b)^2 \rightarrow a = 0, b = 1, r = 20$$

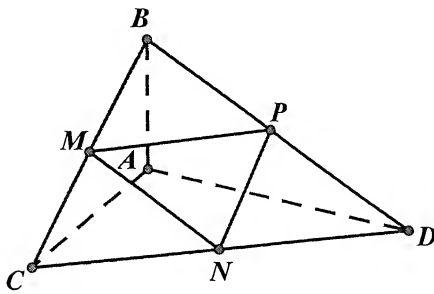
Khoanh C

Phần hình không gian bắt đầu từ câu 35 đến câu 42 là hình không gian kiểu cổ điển.  
Còn Phần hình Oxyz là từ câu 43 đến 50.

Đa phần đều dễ dàng chỉ ở mức độ ghi nhớ công thức và tính toán giản đơn.



**Câu 37:** Các bạn có thể tính ngay được diện tích tứ diện ABCD:



Ta thấy  $S_{AMP} = \frac{1}{4} S_{BCD}$ . Tính chất của đường trung bình nếu các bạn học chắc hình học.

$$V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3 \text{ (Do đường cao vẫn như nhau, chỉ diện tích đáy nhỏ đi mà thôi).}$$

Do  $H$  thuộc  $d \Rightarrow H(1+t; t; -1+2t)$

$\overline{AH}(t;t,2t-3)$  Do AH vuông góc với d:  $\overline{AH}.u_d = \vec{0} \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(2;1;1)$

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA 2017**

**Bài thi: TOÁN**

**ĐỀ THI THỬ NGHIỆM**

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

(Đề thi gồm 07 trang)

**Mã đề thi  
01**

Câu 1. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ ?

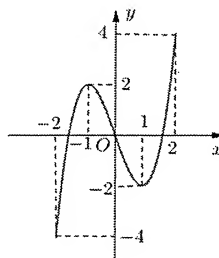
- A.  $x=1$                       B.  $y=-1$                       C.  $y=2$                       D.  $x=-1$

Câu 2. Đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  và đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 4$  có tất cả bao nhiêu điểm chung

- A. 0                      B. 4                      C. 1                      D. 2

Câu 3. Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[-2; 2]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A.  $x = -2$   
B.  $x = -1$   
C.  $x = 1$   
D.  $x = 2$



Câu 4. Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .    B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ .

- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .    D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

Câu 5. Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y'$	-		+ 0 -	
$y$	$+\infty$		2	$-\infty$
	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$
		-1		

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho phương trình  $f(x) = m$  có ba nghiệm thực phân biệt?

- A.  $[-1; 2]$  B.  $(-1; 2)$  C.  $(-1; 2]$  D.  $(-\infty; 2]$

Câu 6. Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng  $-3$ . B. Cực tiểu của hàm số bằng  $1$ .  
C. Cực tiểu của hàm số bằng  $-6$ . D. Cực tiểu của hàm số bằng  $2$ .

Câu 7. Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). D. 54 (m/s).

Câu 8. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$ .

- A.  $x = -3$ . và  $x = -2$ . B.  $x = -3$ . C.  $x = 3$ . và  $x = 2$ . D.  $x = 3$ .

Câu 9. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

- A.  $(-\infty; -1]$ . B.  $(-\infty; -1)$ . C.  $[-1; 1]$ . D.  $[1; +\infty)$ .

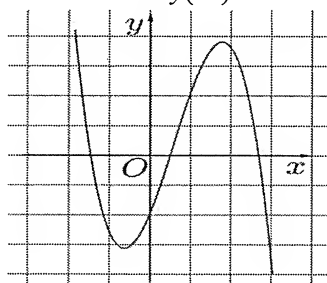
Câu 10. Biết  $M(0; 2)$ ,  $N(2; -2)$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Tính giá trị của hàm số tại  $x = -2$ .

- A.  $y(-2) = 2$ . B.  $y(-2) = 22$ . C.  $y(-2) = 6$ . D.  $y(-2) = -18$ .

Câu 11. Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .  
B.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .  
C.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .  
D.  $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$ .



Câu 12. Với các số thực dương  $a, b$  bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ . B.  $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$ .  
C.  $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$ . D.  $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$ .

Câu 13. Tìm các nghiệm của phương trình  $3^{x-1} = 27$ .

- A.  $x = 9$ . B.  $x = 3$ . C.  $x = 4$ . D.  $x = 10$ .

Câu 14. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức  $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ , trong đó  $s(0)$  là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu,  $s(t)$  là số lượng vi khuẩn A có sau  $t$  (phút). Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.

Câu 15. Cho biểu thức  $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$ , với  $x > 0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $P = x^{\frac{1}{2}}$  B.  $P = x^{\frac{13}{24}}$  C.  $P = x^{\frac{1}{4}}$  D.  $P = x^{\frac{2}{3}}$

Câu 16. Với các số thực dương  $a, b$  bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$  B.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$   
C.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$  D.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$

Câu 17. Tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

- A.  $S = (2; +\infty)$  B.  $S = (-\infty; 2)$  C.  $S = \left( \frac{1}{2}; 2 \right)$  D.  $S = (-1; 2)$

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số  $\ln(1 + \sqrt{x+1})$ .

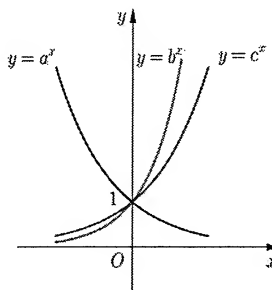
- A.  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$  B.  $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$   
C.  $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$  D.  $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

Câu 19.

Cho ba số thực dương  $a, b, c$  khác 1.

Đồ thị các hàm số  $y = a^x, y = b^x, y = c^x$  được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a < b < c$ .  
B.  $a < c < b$ .  
C.  $b < c < a$ .  
D.  $c < a < b$ .



Câu 20. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $6^x + (3-m)2^x - m = 0$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; 1)$ .

A. [3;4]. B. [2;4]. C. (2;4). D. (3;4).

Câu 21. Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > b > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức

$$P = \log_a^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

A.  $P_{\min} = 19$

B.  $P_{\min} = 13$

C.  $P_{\min} = 14$

D.  $P_{\min} = 15$

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 2x$ .

A.  $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

B.  $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$

C.  $\int f(x)dx = 2 \sin 2x + C$

D.  $\int f(x)dx = -2 \sin 2x + C$

Câu 23. Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên đoạn  $[1;2]$ ,  $f(1)=1$  và  $f(2)=2$ .

Tính  $I = \int_1^2 f'(x)dx$ .

A.  $I = 1$

B.  $I = -1$

C.  $I = 3$

D.  $I = \frac{7}{2}$

Câu 24. Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  và  $F(2)=1$ . Tính  $F(3)$

A.  $F(3) = \ln 2 - 1$

B.  $F(3) = \ln 2 + 1$

C.  $F(3) = \frac{1}{2}$

D.  $F(3) = \frac{7}{4}$

Câu 25. Cho  $\int_0^4 f(x)dx = 16$ . Tính  $I = \int_0^2 f(2x)dx$

A.  $I = 32$

B.  $I = 8$

C.  $I = 16$

D.  $I = 4$

Câu 26. Biết  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $S = a + b + c$

A.  $S = 6$

B.  $S = 2$

C.  $S = -2$

D.  $S = 0$

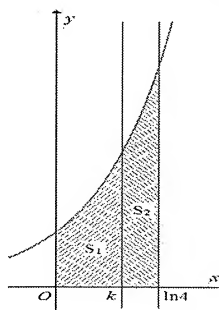
Câu 27. Cho hình thang cong  $(H)$  giới hạn bởi các

Đường  $y = e^x, y = 0, x = 0$  và  $x = \ln 4$ . Đường thẳng

$x = k (0 < k < \ln 4)$  chia  $(H)$  thành hai phần có diện

tích là  $S_1, S_2$  và như hình vẽ bên. Tìm

$x = k$  để  $S_1 = 2S_2$ .



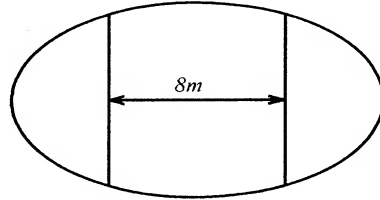
A.  $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B.  $k = \ln 2$

C.  $k = \ln \frac{8}{3}$

D.  $k = \ln 3$

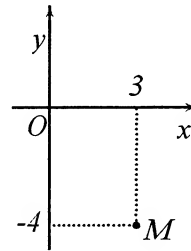
Câu 28. Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng  $16m$  và độ dài trục bé bằng  $10m$ . Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng  $8m$  và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa  $100.000$  đồng/ $1 m^2$ . Hỏi Ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



- A. 7.862.000 đồng      B. 7.653.000 đồng  
C. 7.128.000 đồng      D. 7.826.000 đồng

Câu 29. Điểm  $M$  trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức  $z$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $z$ .

- A. Phần thực là  $-4$  và phần ảo là  $3$ .  
B. Phần thực là  $3$  và phần ảo là  $-4i$ .  
C. Phần thực là  $3$  và phần ảo là  $-4$ .  
D. Phần thực là  $-4$  và phần ảo là  $3i$ .



Câu 30. Tìm số phức liên hợp của số phức  $z = i(3i+1)$

- $\bar{z} = 3 - i$       B.  $\bar{z} = -3 + i$       C.  $\bar{z} = 3 + i$       D.  $\bar{z} = -3 - i$

Câu 31. Tính mô đun của số phức  $z$  thỏa mãn  $z(2-i) + 13i = 1$ .

- A.  $|z| = \sqrt{34}$ .      B.  $|z| = 34$       C.  $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$       D.  $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$

Câu 32. Kí hiệu  $z_0$  là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình

$4z^2 - 16z + 17 = 0$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức  $w = iz_0$ ?

- A.  $M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      B.  $M_2\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .      C.  $M_3\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ .      D.  $M_4\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ .

Câu 33. Cho số phức  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$ . Tính  $P = a + b$ .

- A.  $P = \frac{1}{2}$       B.  $P = 1$       C.  $P = -1$       D.  $P = -\frac{1}{2}$

Câu 34. Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\frac{3}{2} < |z| < 2$ .

B.  $|z| > 2$ .

C.  $|z| < \frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ .

Câu 35. Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$  và thể tích bằng  $a^3$ . Tính chiều cao  $h$  của hình chóp đã cho.

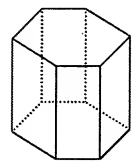
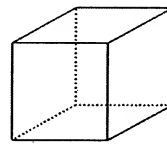
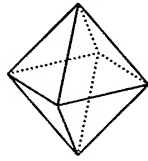
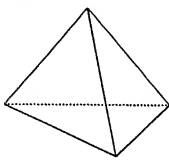
A.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$

B.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

C.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

D.  $h = \sqrt{3}a$

Câu 36. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



A. Tứ diện đều

B. Bát diện đều

C. Hình lập phương

D. Lăng trụ lục giác đều

Câu 37. Cho tứ diện  $ABCD$  có thể tích bằng 12 và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $A.GBC$

A.  $V = 3$

B.  $V = 4$

C.  $V = 6$

D.  $V = 5$

Câu 38. Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ , cạnh  $AC = 2\sqrt{2}$ . Biết  $AC'$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$  và  $AC' = 4$ . Tính thể tích  $V$  của khối đa diện  $ABC.A'B'C'$ .

A)  $V = \frac{8}{3}$

B)  $V = \frac{16}{3}$

C)  $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

D)  $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 39. Cho khối nón  $(N)$  có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng  $15\pi$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón  $(N)$ .

A)  $V = 12\pi$

B)  $V = 20\pi$

C)  $V = 36\pi$

D)  $V = 60\pi$

Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh đáy bằng  $a$  và chiều cao bằng  $h$ . Tính thể tích  $V$  của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A)  $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$

B)  $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$

C)  $V = 3\pi a^2 h$

D)  $V = \pi a^2 h$

Câu 41. Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a, AD = 2a, AA' = 2a$ . Tính bán kính  $R$  của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABB'C'$ .

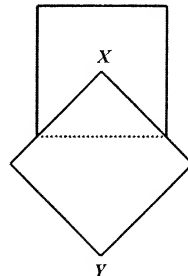
A)  $R = 3a$

B)  $R = \frac{3a}{4}$

C)  $R = \frac{3a}{2}$

D)  $R = 2a$

Câu 42. Cho hai hình vuông cùng có cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh  $X$  của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ bên). Tính thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục  $XY$ .



- A.  $V = \frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}$       B.  $V = \frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}$   
 C.  $V = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$       D.  $V = \frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3;-2;3)$ ,  $B(-1;2;5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ ?

- A.  $I(-2;2;1)$ .      B.  $I(1;0;4)$ .      C.  $I(2;0;8)$ .      D.  $I(2;-2;-1)$ .

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2+3t \\ z=5-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ .

Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của  $d$ ?

- A.  $\vec{u}_1 = (0;3;-1)$ .      B.  $\vec{u}_2 = (1;3;-1)$ .      C.  $\vec{u}_3 = (1;-3;-1)$ .      D.  $\vec{u}_4 = (1;2;5)$ .

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;-2;0)$  và  $C(0;0;3)$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng  $(ABC)$ ?

- A.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$ .      B.  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$ .      C.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$ .      D.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$ .

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm  $I(1;2;-1)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(P): x-2y-2z-8=0$ ?

- A.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ .      B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$   
 C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$       D.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$

và mặt phẳng  $(P): 3x-3y+2z+6=0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $d$  cắt và không vuông góc với  $(P)$ .      B.  $d$  vuông góc với  $(P)$ .  
 C.  $d$  song song với  $(P)$ .      D.  $d$  nằm trong  $(P)$ .

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2;3;1)$  và  $B(5;-6;-2)$ .

Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .



A.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{AM}{BM} = 2$ .

C.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ .

D.  $\frac{AM}{BM} = 3$ .

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  song song và cách đều hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ .

A.  $(P): 2x - 2z + 1 = 0$ .

B.  $(P): 2y - 2z + 1 = 0$ .

C.  $(P): 2x - 2y + 1 = 0$ .

D.  $(P): 2y - 2z - 1 = 0$ .

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , xét các điểm

$A(0;0;1), B(m;0;0), C(0;n;0)$  và  $D(1;1;1)$  với  $m > 0, n > 0$  và  $m+n=1$ . Biết rằng khi  $m, n$  thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đi qua  $D$ . Tính bán kính  $R$  của mặt cầu đó?

A.  $R=1$ .

B.  $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $R = \frac{3}{2}$ .

D.  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1D	2D	3B	4A	5B	6D	7D	8D	9A	10D
11A	12A	13C	14C	15B	16A	17C	18A	19B	20C
21D	22A	23A	24B	25B	26B	27D	28B	29C	30D
31A	32B	33C	34D	35D	36A	37A	38D	39A	40B
41C	42C	43B	44A	45C	46C	47A	48A	49B	50A

(Đề này anh đã làm giải chi tiết bằng Video nên không giải trong đây nữa, các em truy cập vào <http://bikiptheluc.com/sach> để xem nhé)

Hướng dẫn giải đề chính thức 2017 mã 102,103,104 các em xem ở Bí Kíp Casio Advance Version 2018 nhé, nó là 1 bộ cùng với cuốn này để tu luyện >8

## Lượng Giác

### Dạng 1: Tính Toán Biểu Thức Lượng Giác

**Câu 1 :** Giá trị của biểu thức  $P = \frac{\cos 70^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 35^\circ \cos 5^\circ - \sin 35^\circ \sin 5^\circ}$  bằng :

A.  $2 \cos 40^\circ$

B. 1

C.  $\sqrt{3}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

#### Hướng dẫn

Trong phần lượng giác này có 2 đơn vị cơ bản của góc mà chúng ta hay dùng là độ ( $\text{SHIFT} \text{ MODE } [3]$ ) và radian ( $\text{SHIFT} \text{ MODE } [4]$ ) tùy vào đề mà mình chọn hệ nhé

Ở bài này các em sẽ chọn hệ độ và nhập nguyên biểu thức vào là xong

$\text{SHIFT} \text{ MODE } [3]$   
 $\text{COS} [7] [0] [0] [+] \text{COS} [1] [0] [0] [\text{v}] \text{COS} [3] [5] [\text{v}] \text{COS} [5] [\text{v}] [-] \text{SIN} [3] [5] [\text{v}] \text{SIN} [5] [\text{v}] [=]$   

$$\frac{\cos(70) + \cos(10)}{\cos(35)\cos(5) - \sin(35)\sin(5)}$$

$$1.732050808 \quad 1.732050808$$

Nếu em không biết nó là  $\sqrt{3}$  thì chỉ cần xét hiệu với các đáp án xem đáp án nào bằng 0 là được.

**Câu 2:** Cho  $\tan \alpha = 3$ . Tính giá trị biểu thức  $M = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha}$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{139}{70}$

C.  $\frac{70}{139}$

D.  $\frac{54}{139}$

#### Hướng dẫn

Đầu tiên chúng ta cần tính  $\alpha$  rồi thay vào M nhưng chú ý khi máy tính tính

$\arctan(3) = \tan^{-1}(3) = \alpha$  nhưng nếu giải bình thường thì đúng phải là  $\alpha + k\pi$  tuy nhiên bài này

$\alpha$  cứ thỏa mãn điều kiện kia là được, các em thay vào là ra kết quả

$\text{SHIFT} \text{ MODE } [4] \text{SHIFT} [\tan] [3] [\text{v}] \text{SHIFT} [\text{RCL}] [\text{v}]$   
 $\tan^{-1}(3) \rightarrow A$   

$$1.249045772$$

$$\frac{5\sin(A)^3 + 4\cos(A)^3}{139}$$

Tự luận:

$$\begin{aligned} M &= \frac{3\sin\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha} \\ &= \frac{3\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^3\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha} \quad (\text{chia tử và mẫu cho } \cos^3\alpha) \\ &= \frac{3\tan^3\alpha - 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2}{5\tan^3\alpha + 4} \end{aligned}$$

Câu 3: Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn:  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  và  $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ . Tính  $A = \frac{\cot\alpha}{1 + \cot^2\alpha}$

A.  $\frac{\sqrt{6}}{5}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{5}$

D.  $\frac{6}{25}$

Hướng dẫn

Các em làm cũng như bài trên nhưng chú ý nhất ở đây là góc  $\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + k2\pi$

Máy tính dùng hàm ngược tìm thì nó chỉ tính ra  $\alpha$  các em phải chọn k để  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  các em lấy  $\alpha = -\beta + 2\pi$

$$-\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{10}}{5}\right) + 2\pi \quad \text{Ans} \rightarrow A \quad \frac{1 + \tan(A)}{1 + \tan(A)^2} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

Dạng 2: Hàm số Lượng Giác

Câu 1: Tập xác định của hàm số  $y = \tan x + \frac{2}{\sin 2x}$  là:

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$  B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  C. Đáp án khác D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Hướng dẫn

Dạng này các em làm tay cũng được, hoặc CALC vì nó dễ anh sẽ hướng dẫn tự luận

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

**Câu 2 :** Tập giá trị của hàm số  $y = 3\sin 2x - 1$  là :

- A.  $[-4; 2]$       B.  $(-1; 2]$       C.  $(-1; 2)$       D.  $[-1; 1]$

**Hướng dẫn**

Bài này các em làm đơn giản như sau  $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \rightarrow y \in [-4; 2]$

Ngoài ra nếu dùng casio thì em tham khảo cách tìm max-min ở phần dưới

**Câu 3.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ

- A.  $y = \cos 2x - x$       B.  $y = x \cdot \sin 2x$       C.  $y = \sin 2x - x$       D.  $y = \sin^2 x$

**Hướng dẫn**

Các em nhớ lại lí thuyết SGK, hàm lẻ :  $\begin{cases} D = R \rightarrow x, -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$  hàm chẵn  $\begin{cases} D = R \rightarrow x, -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Các em chọn 1 giá trị ví dụ  $x = 10$

Xét đáp án A rồi Nhập biểu thức, CALC  $x = 10$ ,  $x = -10$

$\cos(2X) - X$	$\cos(2X) - X$	$\cos(2X) - X$
-9.591917938	-9.591917938	10.40808206
$\sin(2X) - X$	$\sin(2X) - X$	$\sin(2X) - X$
-9.087054749	-9.087054749	9.087054749

Vậy các em khoanh C.

**Câu 4.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \cos x$

- A. 0      B.  $-\sqrt{2}$       C. 3      D.  $\sqrt{2}$

**Hướng dẫn:**

Các em dùng mode 7 tương tự như ví dụ dưới.

**Câu 5:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3\sin x + 4\cos x + 1$  là:

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

**Hướng dẫn**

Các em sử dụng Table :

**Bước 1: Vào Mode 7**

MODE 7

Bước 2: Nhập hàm

3 sin ALPHA ) ) + 4 cos ALPHA ) ) + 1 =

f(X)=Bsin(X)+4c f(X)=4cos(X)+1

Nếu máy hỏi g(X) thì ấn = để bỏ qua, tắt g(x) đi tính được nhiều hơn SHIFT MODE 5 1

Start  $-\pi$  = End  $\pi$  = Step  $\frac{\pi}{12}$  =

Math  
F(X)  
5.6401  
5.964101615  
5.9497  
5.9853  
5.9617  
5.9235  
5.8853

Dạng 3: Phương trình lượng giác

Câu 1: Tìm nghiệm của phương trình:  $4\sin^3 x \cos 3x + 4\cos^3 x \sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$


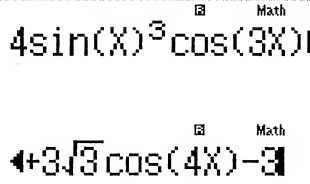
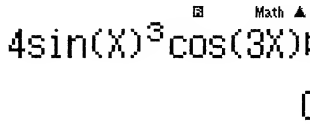
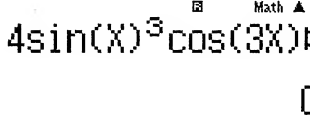
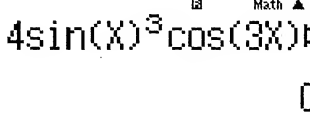
A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \end{cases}$

Hướng dẫn tự luận:

$$\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Trắc nghiệm: Sử dụng CALC để thử từng đáp án

<p><b>Bước 1: Chọn hệ Radian</b></p> <p><b>SHIFT MODE 4</b></p>	
<p><b>Bước 2: Nhập PT</b></p> <p><b>4 sin ALPHA ) ) SHIFT x^2 cos 3 ALPHA ) ) + 4 cos ALPHA ) ) SHIFT x^2 sin 3 ALPHA ) ) + 3 sqrt 3 cos 4 ALPHA ) ) - 3</b></p>	
<p><b>Bước 3: CALC từng giá trị đặc trưng ở các đáp án</b></p> <p>Ví dụ để kiểm tra đáp án A,B,D đúng hay sai thì ta sẽ thử <math>x = \frac{\pi}{8}</math></p> <p><b>CALC SHIFT x10^x ÷ 8 =</b></p> <p>Vậy là A hoặc B,D đúng tiếp theo ta thử <math>x = -\frac{\pi}{24}</math></p> <p><b>= SHIFT x10^x ÷ 2 4 =</b></p> <p>Vậy là khả năng chỉ còn A và D các em sẽ xem tiếp sự khác biệt</p> <p><math>x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{24} + k\pi</math> các em cho k=1 rồi CALC tiếp</p> <p><math>x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}</math></p> <p><b>CALC = SHIFT x10^x ÷ 2 4 + SHIFT x10^x ÷ 2 =</b></p> <p>Vậy A đúng do đáp án D không chứa kết quả này, nó vẫn là nghiệm của phương trình</p>	  

**Ví dụ 2:** Số nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  của phương trình  $\sin 3x + \sin x - 2\cos^2 x = 0$  là:

A.1

B. 2

C.3

D.4

### Hướng dẫn

Các em dùng Table tương tự như ở trên nhưng thay vì quan sát max-min ta sẽ quan sát nghiệm

$$f(X) = \sin(3X) + \sin(X) \quad f(X) = 4 - 2\cos(X)^2$$

Start?

End?

Step?

0

3.141592654

0.2617993878

Ta được các nghiệm

X	F(X)
2   0.2617	-0.9
3   0.5235	0.4142
4   0.7853	0.4142

0

X	F(X)
6   1.3089	0.1248
7   1.5707	0.1248
8   1.8325	0.1248

0

X	F(X)
10   2.3561	0.4142
11   2.6179	0.4142
12   2.8797	-0.9

0

Vậy ta được 3 nghiệm

Ví dụ 3: Có bao nhiêu điểm biểu diễn nghiệm của phương trình sau trên đường tròn lượng

giác:  $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 2x + 4\cos^2 2x}$

A.1

B.2

C.3

D.4

Hướng dẫn

Các em vào Table rồi nhập biểu thức:  $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} - \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 2x + 4\cos^2 2x}$

MODE 7  $\frac{\sin}{\cos}$  ALPHA ) )  $x^y$  1 0  $\frac{+}{-}$  cos ALPHA ) )  $x^y$  1 0  $\frac{\nabla}{\Delta}$  4  $\frac{+}{-}$   $\frac{\sin}{\cos}$  ALPHA ) )  $x^y$  6  $\frac{+}{-}$  cos ALPHA ) )  $x^y$  6  $\frac{\nabla}{\Delta}$  sin 2 ALPHA ) )  $x^2$  + 4 cos 2 ALPHA ) )  $x^2$

$$f(X) = \frac{\sin(X)^{10} + \cos(X)^{10}}{4} \quad f(X) = \frac{\cos(X)^6}{4\cos(2X)^2}$$

$\frac{\sin}{\cos}$   $\frac{+}{-}$  SHIFT  $\times 10^x$   $\frac{\sin}{\cos}$  SHIFT  $\times 10^x$   $\frac{\sin}{\cos}$  SHIFT  $\times 10^x$   $\frac{\div}{\times}$  1 2  $\frac{\sin}{\cos}$

Start  $-\pi$  = End  $\pi$  = Step  $\frac{\pi}{12}$  = Sau đó đi chuyển con trỏ

X	F(X)
1   -3.141	-0.073
2   -2.879	-0.073
3   -2.617	-0.19

0

X	F(X)
6   -1.832	-0.073
7   -1.57	-0.073
8   -1.308	-0.073

0

X	F(X)
12   -0.261	-0.073
13   0	-0.073
14   0.2617	-0.073

0

$$\begin{array}{c|c|c} \text{F(X)} & \text{F(X)} & \text{F(X)} \\ \hline 18 & 1.3089 & -0.073 \\ 19 & 1.5707 & -0.073 \\ 20 & 1.8325 & -0.073 \end{array}$$

Math

$$\begin{array}{c|c|c} \text{F(X)} & \text{F(X)} & \text{F(X)} \\ \hline 24 & 2.8797 & -0.073 \\ 25 & 3.1415 & -0.073 \\ 26 & & -0.073 \end{array}$$

Math

Các em nhìn thấy nó có 5 nghiệm trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  nhưng chú ý trên đường tròn thì  $-\pi, \pi$  trùng nhau cùng là 1 điểm do đó mà ta khoanh D.4

**Câu 2:** Gọi X là tập nghiệm của phương trình  $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$ . Khi đó

- A.  $240^\circ \in X$       B.  $200^\circ \in X$       C.  $290^\circ \in X$       D.  $220^\circ \in X$

**Hướng dẫn:** Nhập phương trình rồi CALC các đáp án

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình lượng giác:  $\cos^2 x - \cos x = 0$  thỏa điều kiện  $0 < x < \pi$  là:

- A.  $x = 0$       B.  $x = \frac{\pi}{2}$       C.  $x = \pi$       D.  $x = \frac{-\pi}{2}$

**Hướng dẫn:** Nhập phương trình rồi CALC các đáp án

**Câu 4:** Phương trình:  $\sin 2x = \frac{-1}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thỏa:  $0 < x < \pi$

- A. 1      B. 3      C. 4      D. 2

**Hướng dẫn:** Nhập phương trình rồi CALC các đáp án

**Câu 5:** Nghiệm dương bé nhất của phương trình:  $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$  là:

- A.  $x = \frac{3\pi}{2}$       B.  $x = \frac{\pi}{6}$       C.  $x = \frac{\pi}{2}$       D.  $x = \frac{5\pi}{6}$

**Hướng dẫn:** Nhập phương trình rồi CALC các đáp án

**Câu 6:** Tìm  $m$  để phương trình  $5\cos x - m\sin x = m+1$  có nghiệm.

- A.  $m \leq 24$       B.  $m \leq 12$       C.  $m \geq 24$       D.  $m \leq -13$

**Hướng dẫn**

Thông thường dạng này các em làm theo công thức điều kiện để phương trình có nghiệm là :  
 $5^2 + (-m)^2 \leq (m+1)^2 \rightarrow m \leq 12$

Ở đây thì anh sẽ hướng dẫn cách làm chung các bài có dạng tham số này, đây là cách số 1 dùng được cho mọi bài dạng này, ngoài ra thì các em dùng cách 2, cách 3 ở các bài dưới cũng được, xem thêm phần casio giải nhanh tương giao toán 12.

Cách 1: dựa vào định lí sách giáo khoa lớp 11:  $f(a)f(b) \leq 0 \rightarrow \exists c \in [a, b]$  để  $f(c) = 0$



**Bước 1: Nhập biểu thức vào Table**

**MODE** **7** **5** **cos** **ALPHA** **)** **)** **=** **(** **)** **sin** **ALPHA** **)** **)** **=** **(** **)** **+** **1** **)**

Các em thay m thành () để sang bước 2

$$f(X) = 4(X) - ((X) + 1)$$

**Bước 2: Chọn giá trị đặc trưng ở các đáp án**

Các em chọn  $m = 10$  xem đáp án A,B có đúng không

Bao giờ cũng chọn để 4 đáp án phân ra 2 trường phái khác nhau tức là từ 1 giá trị được chọn sẽ có 2 đúng, 2 sai sau đó chỉ cần chọn 1 giá trị nữa là loại được 1 trong 2 đáp án còn lại

$$f(X) = 4(10) \text{Bin}()$$

$$f(X) = 4 - ((10) + 1)$$

**Bước 3: Chọn khoảng cần xét cho phù hợp**

Bài này là hàm lượng giác không có đoạn cho sẵn các em xét Start  $-\pi =$  End  $\pi =$  Step  $\frac{\pi}{12}$  rồi quan sát sự đổi dấu của biểu thức

Các em thấy  $m=10$  thì thấy đổi dấu 2 lần nên phương trình đã cho có 2 nghiệm, tiếp theo chúng ta thử với  $m=20$  ấn AC để sửa m còn Start, End, Step các em giữ nguyên nhé, bấm = để bỏ qua.

$$f(X) = 4(20) \text{Bin}() \quad f(X) = 4 - ((20) + 1)$$

Các em không thấy sự đổi dấu từ âm sang dương hay ngược lại do đó với  $m=20$  thì phương trình không có nghiệm nên loại A khoanh B.

Tuy cách này dài áp dụng cho dạng này vì nó có công thức rồi nhưng nó lại áp dụng được cho mọi bài dạng như thế

X	F(X)
7	-1.57
8	-1.308
9	-1.047
10	-0.785

X	F(X)
8	-1.308
9	-1.047
10	-0.785
11	-0.523

X	F(X)
7	-1.57
8	-1.308
9	-1.047
10	-0.785
11	-0.523
12	-0.261

X	F(X)
10	-0.785
11	-0.523
12	-0.261
13	0
14	0.261
15	0.523
16	0.785

này mà không có công thức.

**Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\cos 2x - 2\cos x + m + 2 = 0$  có nghiệm?

- A.  $-5 \leq m \leq -0,5$       B.  $m \geq -1$       C.  $m \leq -5$       D.  $0,5 \leq m \leq 5$

### Hướng dẫn

Dạng này  $m$  ở dạng bậc 1 các em dễ dàng cô lập được  $m$ , cách 2 mục tiêu các em đưa về dạng  $f(x) = m$  từ đó để phương trình có nghiệm thì  $\min_{f(x)} \leq m \leq \max_{f(x)}$  kiến thức này các em sẽ học trong chương trình 12. Từ đó chúng ta quy về bài toán tìm max-min thông thường do đó dùng Table là xong.

$$\cos 2x - 2\cos x + m + 2 = 0 \rightarrow m = 2\cos x - \cos 2x - 2$$

Math	Math
$\begin{array}{c c c} X & F(X) & \\ \hline 1 & -3.141 & \\ 2 & -2.879 & \\ 3 & -2.617 & \end{array}$	$\begin{array}{c c c} X & F(X) & \\ \hline 8 & -1.308 & \\ 9 & -1.047 & \\ 10 & -0.785 & \end{array}$
-5	-0.5

Vậy chúng ta khoanh đáp án A.

**Câu 8:** Tìm  $m$  để phương trình sau có nghiệm  $2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}$

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{-1}{2}$       C.  $\pm \frac{1}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$

### Hướng dẫn tự luận:

$$PT \Leftrightarrow (2m+1)\sin x + (2m-1)\cos x = 2m^2 + \frac{3}{2}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm, ta phải có:  $(2m+1)^2 + (2m-1)^2 \geq \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (4m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

### Casio : Cách 1 dùng SOLVE

**Bước 1:** Nhập PT thay  $m=Y$

$(2 \text{ ALPHA } S \div D) ( \text{ COS } \text{ ALPHA } ) ) ) + \text{ sin } \text{ ALPHA } ) ) ) - ( 2 \text{ ALPHA } S \div D ) x^2 + \text{ cos } \text{ ALPHA } ) ) )$   
 $- \text{ sin } \text{ ALPHA } ) ) ) + 1 \cdot 5 )$

$$2Y(\cos(X)+\sin(X)) - \sin(X) + 1.5$$

**Bước 2:** Các em cho  $m = \frac{1}{2}$  rồi tiến hành Solve xem có nghiệm không

$$2Y(\cos(X)+\sin(X)) - \sin(X) + 1.5 = 0$$

$$X = 1.570795557$$

Vậy là  $m = \frac{1}{2}$  thỏa mãn do đó các em xét lần lượt  $m = -\frac{1}{2}$  và cuối cùng chọn C

### Bài tập rèn luyện

#### Mini Test 1 :

**Câu 1.** Tập xác định của hàm số  $y = \sin \frac{1}{x} - 2\cos \sqrt{4-x^2}$  là

- A.  $\mathbb{R} \setminus (-2; 2)$       B.  $[-2; 2]$       C.  $[-2; 2] \setminus \{0\}$       D.  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 0\}$

**Câu 2.** Tập xác định của hàm số  $y = 1 - \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

- A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$       B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\}$       C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\}$       D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi\right\}$

**Câu 3.** Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:  $y = f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$  là

- A. -1      B. -4      C. -2      D. 3

**Câu 4.** Gọi m là giá trị nhỏ nhất và n là giá trị lớn nhất của hàm số:  $y = f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

trên  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ , khi đó  $|m+n|$  bằng

- A. 2      B. 3      C. 1      D. 4

**Câu 5.** Xác định tính chẵn lẻ hàm số  $y = 1 + \sin x \cos\left(\frac{7\pi}{2} - 2x\right)$ .

- A. Là hàm số không chẵn không lẻ      B. Là hàm số lẻ  
C. Là hàm số chẵn      D. Đồ thị đối xứng qua Ox

**Câu 6.** Hàm số  $y = \frac{2\cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 5\tan(x + 3\pi)}{2 - \cos 2x}$

- A. Là hàm số không chẵn không lẻ  
C. Là hàm số chẵn

- B. Là hàm số lẻ  
D. Đồ thị đối xứng qua Oy

**Câu 7.** Hàm số  $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

A.  $2\pi$

B.  $6\pi$

C.  $9\pi$

D.  $12\pi$

**Câu 8.** Hàm số  $y = \sin(2x)$  đồng biến trên khoảng

A.  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

B.  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

C.  $(0; \pi)$

D.  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

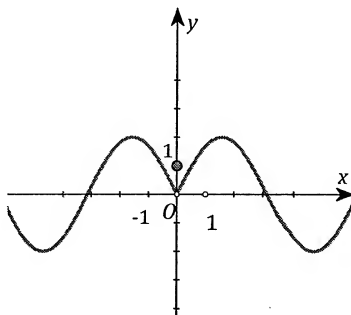
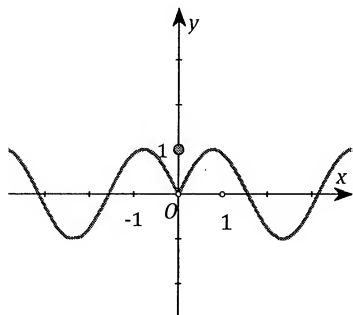
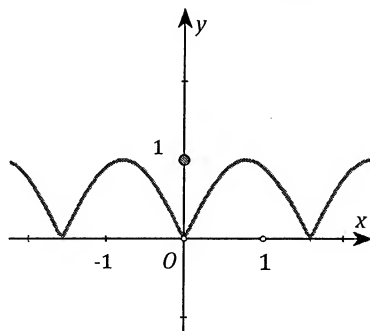
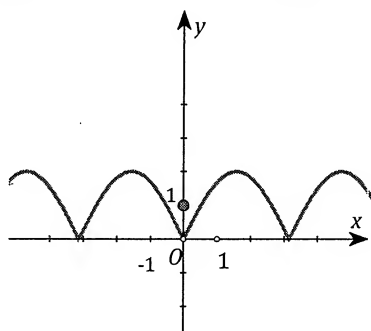
**Câu 9.** Đồ thị của hàm số  $y = |\sin(2x)|$  là

A. H1

B. H2

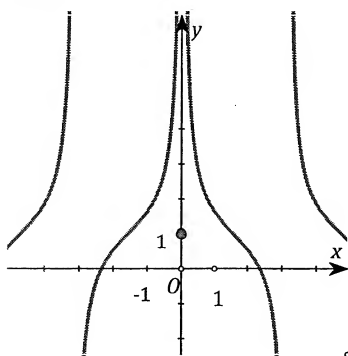
C. H3

D. H4

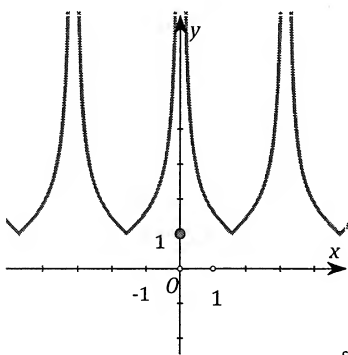


**Câu 10.** Đồ thị hàm  $y = |\tan x| + 1$  là

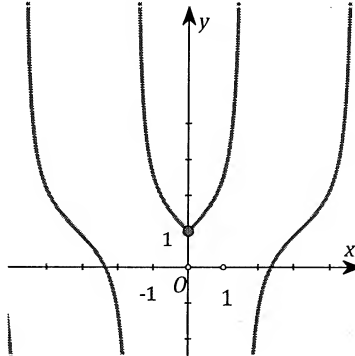
A. H1



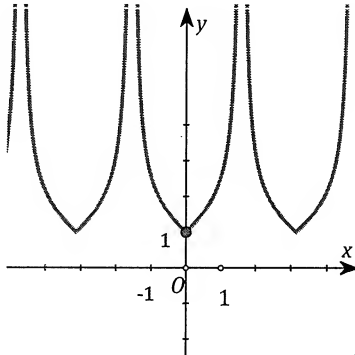
B. H2



C. H3



D. H4



**Câu 11.** Nghiệm phương trình  $\cos(2x - 10^\circ) = -1$

A.  $x = 95 + k360^\circ$

B.  $190^\circ + k180^\circ$

C.  $-95^\circ + k180^\circ$

D.  $95^\circ + k180^\circ$

**Câu 12.** Số nghiệm phương trình  $\tan\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$  trong khoảng  $(0; 2\pi)$  là

A. 6

B. 3

C. 5

D. 4

**Câu 13.** Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình  $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$  là

A.  $\frac{\pi}{3}$

B.  $\frac{\pi}{6}$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D. 0

**Câu 14.** Phương trình  $\tan(3x - 10^\circ) + \cot x = 0$  có bao nhiêu điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác?

A. 0

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 15.** Số điểm biểu diễn nghiệm phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$  trên đường tròn lượng giác là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 16.** Số nghiệm phương trình  $\sin 5x - \frac{\sqrt{6}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \cos 5x$  trong khoảng  $(0; \pi)$  là

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

**Câu 17.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x + 2 \sin \frac{9x}{4} = 4$  trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  là

- A.  $\frac{2\pi}{3}$                       B.  $\frac{2\pi}{9}$                       C.  $\frac{4\pi}{9}$                       D.  $\frac{4\pi}{3}$

**Câu 18.** Nghiệm phương trình  $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$  là

- A.  $x = k\pi$                       B.  $x = \frac{k\pi}{2}$                       C.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$                       D.  $x = k2\pi$

**Câu 19.** Tổng các nghiệm của phương trình :  $\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0$  trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  là

- A.  $\pi$                       B.  $\frac{3\pi}{2}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{4\pi}{3}$

**Câu 20.** Nghiệm dương bé nhất của phương trình  $\left| \sin x - \sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \right| + 4 \sin 2x = 1$  có dạng

$\frac{a\pi}{b} + \pi$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ );  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản, khi đó

- A.  $a = b - 2$                       B.  $a = 2b - 2$                       C.  $ab = -2$                       D.  $a + 3b = 0$

**Câu 21.** Tổng các nghiệm phương trình  $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$  trong khoảng  $(0; \pi)$  là

- A. 0                      B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{5\pi}{12}$

**Câu 22.** Phương trình  $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$  khi đặt  $t = \cos x - \sin x$  ta được

- A.  $t^2 + 4t + 3 = 0$                       B.  $t^2 - 3t - 4 = 0$                       C.  $t^2 - 4t - 5 = 0$                       D.  $t^2 + 3t + 2 = 0$

**Câu 23.** Số giá trị nguyên của m để hàm số  $y = \sqrt{1 - m^2 + 2m \cos x}$  xác định trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**Câu 24.** Với  $m \leq \frac{3}{2}$  thì tổng GTLN + GTNN của hàm số:  $y = \sin^2 x - 4(m - 2) \cos x + 2m$  theo tham số m là

- A.  $4m^2 - 16m + 25$                       B.  $-4m^2 + 20m - 25$                       C.  $4m$                       D.  $4m - 16$

**Câu 25.** Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \tan x - 2(m^2 - 1)\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  là hàm số lẻ

- A. 1                      B. 0                      C.  $\sqrt{2} + 1$                       D.  $-\sqrt{2} + 1$

**Câu 26.** Hàm số  $y = \tan \frac{x}{m} + 3 \cot \frac{x}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Có bao nhiêu cặp  $(m; n)$  dương để hàm số có chu kỳ là  $12\pi$

- A. 13                      B. 15                      C. 8                      D. 9

**Câu 27.** Hàm số  $y = \sin^2((m^2 - 2)x) + \pi$  tổng bình phương tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

- A. 6                      B. 5                      C. 10                      D. 8

**Câu 28.** Phương trình  $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$  có bao nhiêu điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác

- A. 4                      B. 7                      C. 8                      D. 5

**Câu 29.** Tổng bình phương các giá trị  $m < 10$  sao cho phương trình  $1 + 2\cos^2 2x + \sqrt{3} \sin 4x - m = m \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  chỉ có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác

- A. 10                      B. 4                      C. 13                      D. 5

**Câu 30.** Tất cả các giá trị  $m$  để phương trình  $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + m \cos 2x$  để phương trình có 8 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác

- A.  $-\frac{1}{2} < m < 0$                       B.  $-1 < m < 0$                       C.  $-2 < m < \frac{1}{2}$                       D.  $-2 < m < -\frac{1}{2}$

Đáp án

1C	2B	3C	4B	5C	6B	7D	8B	9B	10D
11D	12A	13D	14D	15B	16C	17B	18A	19B	20C
21B	22B	23B	24C	25B	26B	27C	28C	29B	30B

## Mini Test 2

**Câu 1:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$  là:

A.  $x \neq k2\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$       C.  $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

**Câu 2:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3\sin 2x - 5$  lần lượt là:

A. -8 và -2      B. 2 và 8      C. -5 và 2      D. -5 và 3

**Câu 3:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 7 - 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$  lần lượt là:

A. -2 và 7      B. -2 và 2      C. 5 và 9      D. 4 và 7

**Câu 4:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$  lần lượt là:

A.  $\sqrt{2}$  và 2      B. 2 và 4      C.  $4\sqrt{2}$  và 8      D.  $4\sqrt{2} - 1$  và 7

**Câu 5:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$  là:

A. -20      B. -9      C. 0      D. 9

**Câu 6:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 1 - 2\cos x - \cos^2 x$  là:

A. 2      B. 5      C. 0      D. 3

**Câu 7:** Tìm  $m$  để phương trình  $5\cos x - m\sin x = m + 1$  có nghiệm.

A.  $m \leq -13$       B.  $m \leq 12$       C.  $m \leq 24$       D.  $m \geq 24$

**Câu 8:** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm là:

A.  $0 \leq m \leq 1$       B.  $m \leq 0$       C.  $m \geq 1$       D.  $-2 \leq m \leq 0$

**Câu 9:** Phương trình lượng giác:  $3\cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$       C.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$       D. Vô nghiệm

**Câu 10:** Phương trình lượng giác:  $\sin^2 x - 3\cos x - 4 = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$       B.  $x = -\pi + k2\pi$       C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$       D. Vô nghiệm

**Câu 11:** Phương trình lượng giác:  $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$  có nghiệm là:



- A.  $x = k2\pi$       B.  $x = 0$       C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$       D. Vô nghiệm

**Câu 12:** Phương trình lượng giác:  $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là:

- A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$       B.  $x = \arccot \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$       C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

**Câu 13:** Phương trình lượng giác:  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  có nghiệm là:

- A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

**Câu 14:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$       B.  $x = k2\pi$       C.  $x = k\pi$       D.  $x \neq k\frac{\pi}{2}$

**Câu 15:** Phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$       B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$       C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$       D.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

**Câu 16:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$  là

- A.  $x \neq k\pi$       B.  $x \neq k2\pi$       C.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$       D.  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

**Câu 17:** Phương trình:  $\cos x - m = 0$  vô nghiệm khi m là:

- A.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$       B.  $m > 1$       C.  $-1 \leq m \leq 1$       D.  $m < -1$

**Câu 18:** Tập xác định của hàm số  $y = \cos \sqrt{x}$  là

- A.  $x > 0$       B.  $x \geq 0$       C.  $\mathbb{R}$       D.  $x \neq 0$

**Câu 19:** Phương trình:  $\sin 2x = \frac{-1}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thỏa:  $0 < x < \pi$

- A. 1                      B. 3                      C. 2                      D. 4

**Câu 20:** Phương trình:  $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi$       B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$       C.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$       D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 21:** Phương trình:  $\sin x = \frac{1}{2}$  có nghiệm thỏa  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  là:

- A.  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{6}$       C.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{3}$

**Câu 22:** Số nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

**Câu 23:** Nghiệm của phương trình lượng giác:  $\sin^2 x - 2\sin x = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = k2\pi$               B.  $x = k\pi$               C.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$               D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

**Câu 24:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$  là

- A.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$       B.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$       C.  $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$       D.  $x \neq k\pi$

**Câu 25:** Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

- A.  $\sin x + 3 = 0$                       B.  $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$   
C.  $\tan x + 3 = 0$                       D.  $3\sin x - 2 = 0$

**Câu 26:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$  là

- A.  $x \neq k2\pi$               B.  $x \neq k\pi$               C.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$               D.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

**Câu 27:** Giá trị đặc biệt nào sau đây là đúng

A.  $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

B.  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

C.  $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

D.  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

**Câu 28:** Phương trình lượng giác:  $\cos 3x = \cos 12^\circ$  có nghiệm là:

A.  $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$

C.  $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$

D.  $x = \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$

**Câu 29:** Nghiệm dương bé nhất của phương trình:  $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$  là:

A.  $x = \frac{\pi}{6}$

B.  $x = \frac{\pi}{2}$

C.  $x = \frac{3\pi}{2}$

D.  $x = \frac{5\pi}{6}$

**Câu 30:** Số nghiệm của phương trình:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  với  $\pi \leq x \leq 5\pi$  là:

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

**Câu 31:** Phương trình:  $\sin\left(\frac{2x}{3} - 60^\circ\right) = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \pm \frac{5\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$

B.  $x = k\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

D.  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$

**Câu 32:** Điều kiện để phương trình  $3\sin x + m\cos x = 5$  vô nghiệm là

A.  $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$

B.  $m > 4$

C.  $m < -4$

D.  $-4 < m < 4$

**Câu 33:** Nghiệm của phương trình:  $\sin x + \cos x = 1$  là:

A.  $x = k2\pi$

B.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

C.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

**Câu 34:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  là

A.  $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

B.  $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$

C.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

D.  $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

**Câu 35:** Giải phương trình lượng giác:  $2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \pm\frac{5\pi}{3} + k2\pi$       B.  $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$       C.  $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k4\pi$       D.  $x = \pm\frac{5\pi}{3} + k4\pi$

**Câu 36:** Phương trình lượng giác:  $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$       B. Vô nghiệm      C.  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Câu 37:** Điều kiện để phương trình  $m\sin x - 3\cos x = 5$  có nghiệm là:

- A.  $m \geq 4$       B.  $-4 \leq m \leq 4$       C.  $m \geq \sqrt{34}$       D.  $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$

**Câu 38:** Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm:

- A.  $\sqrt{3}\sin x = 2$       B.  $\frac{1}{4}\cos 4x = \frac{1}{2}$   
C.  $2\sin x + 3\cos x = 1$       D.  $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$

**Câu 39:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

- A.  $x \neq \frac{-\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$       B.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$       C.  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$       D.  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

**Câu 40:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x + 1}$  là

- A.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$       B.  $x \neq k2\pi$       C.  $x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$       D.  $x \neq \pi + k2\pi$

**Câu 41:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$  là

- A.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$       B.  $x \neq k2\pi$       C.  $x \neq \frac{k\pi}{2}$       D.  $x \neq k\pi$

**Câu 42:** Nghiệm của phương trình lượng giác:  $\cos^2 x - \cos x = 0$  thỏa điều kiện  $0 < x < \pi$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{2}$       B.  $x = 0$       C.  $x = \pi$       D.  $x = \frac{-\pi}{2}$

**Câu 43:** Số nghiệm của phương trình:  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$  với  $0 \leq x \leq 2\pi$  là:

- A. 0                      B. 2                      C. 1                      D. 3

**Câu 44:** Nghiệm của phương trình lượng giác:  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  thỏa điều kiện  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3}$                       B.  $x = \frac{\pi}{2}$                       C.  $x = \frac{\pi}{6}$                       D.  $x = \frac{5\pi}{6}$

**Câu 45:** Giải phương trình:  $\tan^2 x = 3$  có nghiệm là:

- A.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$                       B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$                       C. vô nghiệm                      D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

**Câu 46:** Nghiệm của phương trình:  $\sin x (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$  là:

- A.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$                       C.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$                       D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 47:** Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

- A.  $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$                       B.  $3 \sin x - 4 \cos x = 5$   
C.  $\sin x = \cos \frac{\pi}{4}$                       D.  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$

**Câu 48:** Phương trình:  $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1$  tương đương với phương trình nào sau đây:

- A.  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$                       B.  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$                       C.  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$                       D.  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

**Câu 49:** Nghiệm đặc biệt nào sau đây là sai

- A.  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$                       B.  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$   
C.  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$                       D.  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

**Câu 50:** Phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

D.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

Đáp án tham khảo

1C	2A	3C	4D	5B	6A	7B	8D	9B	10D
11A	12B	13B	14D	15A	16D	17A	18B	19C	20C
21B	22B	23B	24B	25A	26A	27B	28B	29A	30D
31D	32D	33B	34D	35D	36C	37D	38C	39C	40C
41D	42A	43B	44C	45B	46A	47D	48C	49C	50D

## Kĩ thuật giải nhanh Tổ Hợp – Nhị Thức Newton

**\*Công thức**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

**Tính Chất:** Khi khai triển nhị thức  $(a+b)^n$  ta cần để ý:

1. Ở vế phải có  $n+1$  số hạng, trong đó đầu tiên là  $a^n$ , cuối cùng là  $b^n$ , các vị trí còn lại là tích  $a^{n-k} b^k$  với số mũ của  $a$  giảm từ  $n$  đến  $0$  và số mũ của  $b$  tăng từ  $0$  đến  $n$  sao cho trong mỗi số hạng, tổng số mũ của  $a$  và  $b$  phải bằng  $n$  tức là  $n-k+k=n$ .

2. Số hạng thứ  $k+1$ , kí hiệu:  $T_{k+1}$  với  $k=0, 1, 2, \dots, n$  và có dạng  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

3. Hệ số trong khai triển (1) có tính chất đối xứng.

**Chú ý:**  $C_n^k = C_n^{n-k}$  và  $C_n^0 = C_n^n = 1$ .

Cho  $a=1, b=1$  ta có:  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ .

Cho  $a=1, b=-1$  ta có:  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ .

Cho  $a=1, b=x$  ta có:  $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$ .

Cho  $a=1, b=-x$  ta có:  $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$ .

**Chú ý:**

Đối với  $(1+x)^n$  thì hệ số của  $x^k$  là  $C_n^k$ .

Đối với tích  $(1+x)^n (1+x)^m$  thì hệ số của  $x^k$  là  $C_{m+n}^k$  và được định bởi:

$$C_{m+n}^k = \sum C_n^i C_m^j, (i+j=k).$$

Đối với  $(a+x^m)^n$  thì hệ số của  $x^{m.k}$  là  $a^{n-k} C_n^k$ .

**I. Dạng toán về Tổ Hợp, Chính Hợp**

**Câu 1:** Số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n+6$

- A. 11      B. 14      C. 13      **D. 12**

**Hướng dẫn****Cách 1 : CALC các đáp án**

Bước 1: Nhập biểu thức

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{-} \boxed{(\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\div} \boxed{(\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{(\text{ALPHA}} \boxed{4} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{\text{Math}} \boxed{)} \boxed{(X-1)-(4X+6)}$

Bước 2: CALC luân lượt các đáp án

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=}$

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{=}$

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{=}$

$\text{XP2}-(X+1)\text{C}(X-1) \triangleright \text{XP2}-(X+1)\text{C}(X-1) \triangleright \text{XP2}-(X+1)\text{C}(X-1) \triangleright$   
 $-6 \quad \quad \quad 15 \quad \quad \quad 7$

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{=}$

$\text{XP2}-(X+1)\text{C}(X-1) \triangleright$   
 $0$

Vậy khoanh D

Cách 2: Dùng Table (không cần biết đáp án)

Bước 1: Vào Table nhập biểu thức như trên

$f(X)=\text{XP2}-(X+1)\text{C}(X-1) \triangleright f(X)=\text{1)-(4X+6)}$

Bước 2: Start 1= End 20= Step 1 = (Nếu máy hỏi g(x) thì bấm = để bỏ qua)

Sau đó đẩy con trỏ xuống  $\blacktriangledown$  xem biểu thức bằng 0 tại đâu :

X	F(X)
1	-6
2	15
3	7

## II. Dạng toán về Nhị Thức Newton

Ví dụ 1. Tìm số hạng chứa  $x^{40}$  trong khai triển Niu-ton:  $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ , với  $x \neq 0$ .



A. -30

B.  $-30x^{40}$

C. -60

D.  $-60x^{40}$

### Hướng dẫn

Bình thường khi các em làm theo tự luận :  $C_{15}^k (x^3)^{15-k} \left(\frac{-2}{x^2}\right)^k = C_{15}^k (-2)^k x^{45-5k}$ ,  $0 \leq k \leq 15, k \in \mathbb{N}$

Sẽ phân lớp ra phần hệ số và phần số mũ do đó ta sẽ sử dụng Table để làm nhanh như sau:

Trước hết vào Mode 7 sau đó các em phải bật cả  $f(x), g(x)$  **SHIFT MODE** **▼** **5** **2**

Các em nhập phần hệ số vào  $f(x)$  lưu ý thay  $k = X$

$$\text{f(X)} = (15\text{X}) \times (-2)$$

Sau đó nhập phần số mũ vào  $g(x)$  lưu ý thay  $x = 10$ , (nếu không có  $g(x)$  các em bấm

**SHIFT MODE** **▼** **5** **2** để bật, còn **SHIFT MODE** **▼** **5** **1** để tắt  $g(x)$ )

$$\text{g(X)} = (10^3)^{15-X} \times \left(\frac{1}{10^2}\right)^X$$

Start 0= End 15= Step 1=

Đẩy con trỏ tới  $10^{40}$  ở cột  $g(x)$

	X	F(X)	Math	G(X)
1	0	0		1.0000
2	1	-30		1.0000
3	2	420		1.0000
		1 x 10 40		

Như vậy các em được hệ số cần tìm 30

Hướng dẫn thì có vẻ dài dòng nhưng thực tế bấm máy các em chỉ cần nhớ hệ thức newton trong đầu rồi nhập vào máy thôi.

*Cách này còn tìm được hệ số lớn nhất, hệ số nhỏ nhất, hệ số không chứa x trong khai triển*

**Ví dụ 2.** Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển của  $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^n$  ( $x > 0$ ) biết rằng  $n$  là số tự nhiên thỏa mãn  $A_n^2 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 92$ .

- A. 820      B. 1120      C. 560      D. 1792

**Hướng dẫn:**

**Bước 1:** Tìm  $n$   $A_n^2 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 92$  dùng Table

MODE 7 ALPHA ) SHIFT X 2 + ALPHA ) SHIFT ÷ ( ALPHA ) - 1 ) + ALPHA ) SHIFT ÷ ( ALPHA ) = 2 ) = 9 2

$$f(X) = X^2 + X(X-1)$$

≡ ≡

Start?	End?	Step?
1	19	1

Cách này các em chỉ cần nhập cho đúng đỡ mất công khai triển.

**Bước 2:** Tìm hệ số của  $x^4$  tương tự như VD trước

Theo công thức khai triển  $C_8^k (x^3)^{8-k} \left(\frac{-2}{x^2}\right)^k$  khai triển này có 2 phần : phần hệ số  $C_8^k (-2)^k$  và phần số mũ  $(x^3)^{8-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$

Các em thay  $X=10, k=x$  để thay đổi giá trị của  $k$  nhé

MODE 7

8 SHIFT ÷ ALPHA ) X ( = 2 ) x^MATH ALPHA )

$$f(X) = 8(X \times (-2))^X$$

= 1 0 x^MATH 3 ( 8 - ALPHA ) ) ) > X ( = 1 > 1 0 x^2

$$g(X) = 10^{3(8-X)} \times \left( \frac{1}{10^2} \right)^X$$

=

0 =

8 =

Start?

End?

Step?

1

20

1

1 =

	X	F(X)	G(X)
4	3	-448	1.009
5	4	-1792	0.1
6	5		1120

Chúng ta vừa nhìn được số mũ vừa thấy được hệ số của nó.

**Ví dụ 3:** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển nhị thức Newton của  $(2+x)^n$ , biết:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048 \quad (*)$$

(  $n$  là số nguyên dương,  $C_n^k$  là số tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử ).

A. 11

B. -11

C. -22

D. 22

**Hướng dẫn:**

Quan trọng là các em xử lý biểu thức  $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$

Xét khai triển:

$$(3-x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 3^{n-k} \cdot (-1)^k \cdot x^k$$

$$= 3^n C_n^0 x^0 - 3^{n-1} C_n^1 x + 3^{n-2} C_n^2 x^2 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

Thay  $x=1$  ta được:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2^n$$

$$\Leftrightarrow 2048 = 2^n$$

$$\Leftrightarrow n = 11$$

Sau đó tìm số hạng chứa  $x^{10}$  thì các em làm tương tự như ví dụ trên.

**Câu 4:** Trong bảng khai triển của nhị thức  $(x-y)^{11}$ , hệ số của  $x^8 y^3$  là:

A.  $C_{11}^8$

B.  $C_{11}^3$

C.  $C_{10}^7 + C_{10}^8$

D.  $-C_{11}^3$

**Hướng dẫn**

Để cho đơn giản các em chọn  $y=1$  bài toán trở thành tìm  $x^8$  trong khai triển  $(x-1)^{11}$

**Câu 5 :** Tổng các hệ số nhị thức Niu - tơn trong khai triển  $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$  bằng 64.

Số hạng không chứa  $x$  trong khai triển là :

A. 360

B. 210

C. 250

D. 240

**Hướng dẫn**

Tổng hệ số nhị thức Niu-tơn của  $(ax+b)^n$  là  $2^n$  nên các em áp dụng cho bài này thì ta được :

$$2^{3n} = 64 \rightarrow n = 2$$

Xét khai triển :  $P = \left(4x + \frac{1}{4x^2}\right)^6$  các em dùng Table tìm số hạng  $x^0 = 1$

Phần hệ số các em nhập :  $f(x) = (6CX) * 4^{6-X} * \left(\frac{1}{4}\right)^X$

$$f(X) = 6CX \times 4^{6-X} \times \left(\frac{1}{4}\right)^X \quad f(X) = 4^{6-X} \times \left(\frac{1}{4}\right)^X$$

Phần số mũ các em nhập  $g(x) = 10^{6-X} * \left(\frac{1}{10^2}\right)^X$

$$g(X) = 10^{6-X} \times \left(\frac{1}{10^2}\right)^X \quad g(X) = \left(\frac{1}{10^2}\right)^X$$

Start 0= End 6= Step 1=

2	×	1	F(X)	Math	G(X)
4		2	1536		1000
		3	20		1.63
					240

Vậy khoanh D.

**Câu 6 :** Cho khai triển  $(1+2x)^n = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ ; trong đó  $n \in \mathbb{N}^*$  và các hệ số thỏa mãn hệ thức  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$ . Tìm hệ số lớn nhất.

A. 1293600

B. 126720

C. 924

D. 792

Hướng dẫn

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$$

$$\frac{a_n}{2^n} = a_n x^n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = x^n \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = 4096 \rightarrow n = 12$$

Các em làm giống như trên tuy nhiên mình cần quan sát hệ số lớn nhất thôi

8	×	7	F(X)	Math	G(X)
9		8	101376		1.007
10		9	112640		1.008
					1.009
					126720

Bài tập rèn luyện

Mini Test 1:

**Câu 1:** Số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n + 6$

- A. 11      B. 14      C. 13      D. 12

**Câu 2:** Tìm số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $\frac{1}{A_n^{n-1}} + \frac{1}{C_{n+1}^{n-1}} + \frac{1}{A_{n+1}^2} = 1$

- A.  $n = 3$       B.  $n = 6$       C.  $n = 2$       D.  $n = 9$

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $C_x^3 + C_{x+1}^4 - \frac{7}{2}C_{x-2}^2 - 2C_x^4 = 0$  là

- A.  $x = 8$       B.  $x = 5$       C.  $x = 7$       D.  $x = 6$

**Câu 4:** Tổng  $C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + C_{2016}^3 + \dots + C_{2016}^{2016}$  bằng :

- A.  $2^{2016}$       B.  $2^{2016} + 1$       C.  $2^{2016} - 1$       D.  $4^{2016}$

**Câu 5:** Số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n + 6$

- A. 12      B. 14      C. 13      D. 11

### Nhị Thức Newton

**Câu 6:** Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển của  $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^n$  ( $x > 0$ ) biết rằng  $n$  là số tự nhiên thỏa mãn  $A_n^2 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 92$ .

- A. 820      B. 1120      C. 560      D. 1792

**Câu 7:** Trong bảng khai triển của nhị thức  $(x - y)^{11}$ , hệ số của  $x^8 y^3$  là:

- A.  $C_{11}^8$       B.  $C_{11}^3$       C.  $C_{10}^7 + C_{10}^8$       D.  $-C_{11}^3$

**Câu 8:** Tìm hệ số của  $x^5$  trong khai triển  $P(x) = (x+1)^6 + (x+1)^7 + \dots + (x+1)^{12}$

- A. 1711      B. 1287      C. 1716      D. 1715

**Câu 9:** Tổng các hệ số nhị thức Niu - tơn trong khai triển  $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$  bằng 64.

Số hạng không chứa  $x$  trong khai triển là :

- A. 360      B. 210      C. 250      D. 240

**Câu 10 :** Trong khai triển  $(x-2)^{2016} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2016}x^{2016}$ . Khi đó tổng

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}$  bằng:

- A.1      B.1      C.  $3^{2016}$       D.  $2^{2016}$

**Câu 11 :** Cho khai triển  $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ; trong đó  $n \in \mathbb{N}^*$  và các hệ số thỏa mãn hệ thức

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096. \text{ Tìm hệ số lớn nhất.}$$

- A. 1293600      B. 126720      C. 924      D. 792

**Câu 12:** Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển  $\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)(3x+1)^{10}$ .

- A.  $66.3^{10}$ .      B.  $66.3^{10}.x^{10}$ .      C.  $22.3^9$ .      D.  $22.3^9.x^{10}$ .

1D	2C	3C	4C	5A	6B	7D	8D	9D	10B
11B	12C								

### Mini Test 2:

**Câu 1.** Trong khai triển  $(x^3 + xy)^{15}$  số hạng chính giữa là:

- A.  $6435x^{31}y^7$       B.  $6435x^{29}y^8$       C.  $6435x^{31}y^7$  và  $6435x^{29}y^8$ .      D.  $6435x^{29}y^7$  và  $6435x^{29}y^8$

**Câu 2.** Trong khai triển  $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + \dots + a_{100}x^{100}$ .

a. Hệ số  $a_{97}$  là:

- A. 1293600      B. -1293600      C.  $-2^{97}C_{100}^{97}$       D.  $(-2)^{98}C_{100}^{98}$

b. Tổng hệ số:  $a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$

- A.1      B. -1      C.  $2^{100}$       D.  $3^{100}$

c. Tính tổng các  $T = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{100}$

- A.1      B.-1      C.  $2^{100}$       D.  $3^{100}$

**Câu 3.** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ . Biết:  $C_n^2C_n^{n-2} + 2C_n^2C_n^3 + C_n^3C_n^{n-3} = 100$

A.9

B.8

C.6

D. Không có giá trị nào thỏa cả

**Câu 4.** Trong khai triển  $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124}$  có bao nhiêu số hạng hữu tỉ

A. 32

B. 64

C. 16

D. 48

**Câu 5.** Tổng các hệ số trong khai triển  $\left(\frac{1}{x} + x^4\right)^n$  là 1024. Tìm hệ số chứa  $x^5$ .

A. 120

B. 210

C. 792

D. 972

**Câu 6.** Tìm hệ số chứa  $x^9$  trong khai triển

$$(1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + (1+x)^{13} + (1+x)^{14} + (1+x)^{15}.$$

A. 3003

B. 8000

C. 8008

D. 3000

**Câu 7.** Biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển  $(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x})^n$  là 36. Hãy tìm số hạng thứ 8

A.  $84x^3\sqrt{x}$

B.  $9\frac{1}{x^6}\sqrt{x}\sqrt[3]{x}^8$

C.  $36\frac{1}{x^6}\sqrt{x}\sqrt[3]{x}^8$

D. Đáp án khác.

**Câu 8.** Tìm hệ số có giá trị lớn nhất của khai triển  $(1+x^2)^n$ . Biết rằng tổng các hệ số là 4096

A. 253

B. 120

C. 924

D. 792

**Câu 9.** Tìm số hạng chính giữa của khai triển  $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}})^8$ , với  $x > 0$

A.  $70x^{\frac{1}{3}}$

B.  $70x^{\frac{1}{3}}$  và  $56x^{\frac{-1}{4}}$

C.  $56x^{\frac{-1}{4}}$

D.  $70\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}$

**Câu 10.** Tìm x,y sao cho.  $C_{x+1}^y \cdot C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 3.7.10$

A. (3,7)

B. (3,2)

C. (8,3)

D. (7,3)

**Câu 11.** Tìm x,y sao cho.  $(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 5:3:7$

A. (3,7)

B. (3,2)

C. (8,3)

D. (7,3)



**Câu 12.** Giải phương trình.  $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$  nghiệm  $(y,x)$  là.

- A. (2,5)      B. (5,2)      C. (3,5)      D. (5,3)

**Câu 13.** Tổng tất cả các hệ số của khai triển  $(x+y)^{20}$  bằng bao nhiêu

- A.81920      B.819200      C.10485760      D. 1048576

**Câu 14.** Cho  $A = C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2C_n^2 + \dots + 5^nC_n^n$ . Vậy

- A.  $A = 5^n$       B.  $A = 6^n$       C.  $A = 7^n$       D. Đáp án khác

**Câu 15.** Biết  $C_n^5 = 15504$ . Vậy thì  $A_n^5$  bằng bao nhiêu?

- A.108528      B.62016      C.77520      D.1860480

**Câu 16.** Tìm số nguyên dương bé nhất  $n$  sao cho trong khai triển  $(1+x)^n$  có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là  $7/15$

- A.22      B.21      C.20      D.23

**Câu 17.** Tính hệ số của  $x^{25}y^{10}$  trong khai triển  $(x^3 + xy)^{15}$

- A.3003      B.4004      C.5005      D.58690

1C	2a-B	2b-A	2c-D	3C	4A	5A	6C	7D	8C
9A	10C	11D	12A	13D	14B	15D	16B	17A	

## CHUYÊN ĐỀ XÁC SUẤT

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xét thí nghiệm gieo quân xúc sắc 6 mặt (có thể gieo một con, hai con hoặc nhiều quân xúc sắc) và xét số chấm xuất hiện, ta có các khái niệm sau đây:

#### 1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm có kết quả mang tính chất ngẫu nhiên mà ta không thể biết chắc được kết quả sẽ xảy ra nhưng có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Ví dụ: Việc gieo quân xúc sắc là một phép thử ngẫu nhiên.

#### 2. Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên gọi là không gian mẫu. Không gian mẫu thường được kí hiệu là  $E$  hoặc  $\Omega$ .

Ví dụ: Nếu gieo một quân xúc sắc thì không gian mẫu  $E$  là  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Nếu gieo lần lượt hai quân xúc sắc thì không gian mẫu  $E$  là:

$\{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)\}$

#### 3. Biến cố

Mỗi tập hợp con của không gian mẫu là một biến cố. Mỗi phần tử của biến cố  $A$  gọi là một kết quả thuận lợi cho  $A$ .

Ví dụ: Biến cố để gieo lần lượt 2 quân xúc sắc có tổng 5 là:  $\{(1; 4), (4; 1), (2; 3), (3; 2)\}$ .

#### 4. Các loại biến cố

#### 4.1. Biến cố sơ cấp

Mỗi phần tử của không gian mẫu là một biến cố sơ cấp.

**Ví dụ**  $(1; 2)$  là biến cố sơ cấp

#### 4.2. Biến cố chắc chắn

Không gian mẫu  $E$  còn gọi là biến cố chắc chắn, tức là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên.

**Ví dụ:** Biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn hoặc bằng 2 và nhỏ hơn hoặc bằng 12 là biến cố chắc chắn.

#### 4.3. Biến cố không thể

Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên. Biến cố không thể kí hiệu là  $\emptyset$ .

**Ví dụ:** Biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 12 là biến cố không thể.

#### 4.4. Biến cố hợp

Biến cố  $A \cup B$  là biến cố “ít nhất có A hoặc B xảy ra” gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Biến cố  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  gọi là hợp của k biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$

**Ví dụ:** Gọi A là biến cố để gieo lần lượt 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 10 và B là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 4.

Khi đó biến cố  $A \cup B$  là  $\{(6; 5), (5; 6), (6; 6), (1; 1), (1; 2), (2; 1)\}$

#### 4.5. Biến cố giao

Biến cố  $A \cap B$  là biến cố “cả A và B cùng xảy ra”.

Biến cố  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$  là biến cố “ $A_1, A_2, \dots, A_k$  cùng xảy ra” gọi là giao của biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

**Ví dụ:** Gọi A là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 7 và B là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 10.

Khi đó biến cố  $A \cap B$  là  $\{(2; 6), (6; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 4), (3; 6), (6; 3)\}$

#### 4.6. Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B gọi là xung khắc nếu khi biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, tức là  $A \cap B \neq \emptyset$

**Ví dụ:** Biến cố A gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 10 và biến cố B gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 4 là hai biến cố xung khắc.

#### 4.7. Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A trong không gian mẫu E, kí hiệu  $\bar{A}$  là biến cố gieo 2 quân xúc sắc có tổng là một số lẻ.

#### 4.8. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B của một phép thử ngẫu nhiên gọi là độc lập với nhau nếu sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

**Ví dụ:** Khi gieo 2 quân xúc sắc, gọi A, B là biến cố tương ứng để quân xúc sắc đầu tiên và thứ hai nhận được mặt 3. Khi đó A, B độc lập với nhau.

### 5. Tần số của một biến cố

Số m lần xuất hiện của biến cố A trong n lần thực hiện phép thử ngẫu nhiên gọi là tần số của biến cố A ( $0 \leq m \leq n$ )

**Ví dụ:** Khi gieo 16 lần một quân xúc sắc ta thấy có 2 lần xuất hiện mặt lục thì tần số của biến cố quân xúc sắc xuất hiện mặt lục là 2 trong 16 phép thử.

### 6. Tần số của một biến cố

Tỉ số giữa tần số  $m$  của biến cố  $A$  và số  $n$  lần thực hiện phép thử ngẫu nhiên gọi là tần suất của biến cố  $A$ . Kí hiệu  $f = \frac{m}{n}$ .

**Ví dụ:** Khi gieo 16 lần một quân xúc sắc ta thấy có 2 lần xuất hiện mặt lục thì tần suất của biến cố quân xúc sắc xuất hiện mặt lục là:  $f = \frac{2}{16} = 0,125$ .

### 7. Định nghĩa xác suất

Xác suất của biến cố  $A$  là tỉ số giữa số trường hợp thuận lợi cho  $A$  và tổng số trường hợp có thể xảy ra trong phép thử ngẫu nhiên:

$$P(A) = \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho } A}{\text{Tổng số trường hợp có thể xảy ra}}$$

Nếu biến cố  $A$  có  $m$  phần tử trong không gian mẫu  $E$  có  $n$  phần tử ( $0 \leq m \leq n$ ) thì xác suất của biến cố  $A$  là:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|E|} \quad (|A| \text{ là số phần tử của } A, |E| \text{ là số phần tử của } E).$$

### 8. Tính chất

Cho một thí nghiệm ngẫu nhiên có không gian mẫu  $E$  và  $A, B$  là hai biến cố.

Khi đó  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;  $P(E) = 1$ ;  $P(\emptyset) = 0$ ,  $A$  và  $B$  xung khắc  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

### 9. Quy tắc tính xác suất

#### 9.1.1. Biến cố xung khắc

Cho  $A$  và  $B$  là hai biến cố xung khắc. Ta có:  $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Cho  $k$  biến cố xung khắc  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Ta có:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

### 9.1.2. Biến cố đối

Cho  $\bar{A}$  là biến cố đối của biến cố A. Ta có:  $P(\bar{A}) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

## 9.2. Quy tắc nhân xác suất

### 9.2.1. Biến cố độc lập

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Ta có:  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Cho k biến cố độc lập  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Ta có:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1).P(A_2) \dots P(A_k)$$

### 9.2.2. Biến cố xung khắc

Cho A và B là hai biến cố xung khắc.

Ta có:  $(A \cap B)$  luôn không xảy ra, nên:  $P(A \cap B) = 0$

Ta có A và B xung khắc thì A và B không độc lập nên:

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \text{ với } P(A) > 0 \text{ và } P(B) > 0.$$

## 9.3. Liên hệ giữa quy tắc cộng xác suất và quy tắc nhân xác suất

Cho A và B là hai biến cố bất kì. Ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Chú ý:** Có sách kí hiệu giao của hai biến cố A và B là  $A.B$  thay cho  $A \cap B$ .

Giao của k biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là  $A_1.A_2 \dots A_k$ .

## 9.4. Sử dụng CASIO để tính nhanh: hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Ở đây để tính nhanh trên máy tính các em làm như sau:

Để tính  $C_n^k \rightarrow nCk$ , Ví dụ  $C_{10}^3$  thì các em nhập:

**1 0 SHIFT  $\div$  3 =**

10C3

Math ▲

120

Để tính giai thừa thì các em bấm như sau: 10!

**1 0 SHIFT  $x!$**

10!

Math ▲

Để tính chỉnh hợp  $A_{10}^3$  thì các em bấm như sau :

**1 0 SHIFT  $\times$  3 =**

10P3

Math ▲

720

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1:** Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả đỏ và 2 quả xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả đỏ và 6 xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:

a. Cả hai quả đều đỏ

A. 0,24

B. 0,42

C. 0,26

D. 0,62

b. Hai quả cùng màu.

A. 0,28

B. 0,48

C. 0,84

D. 0,82

c. Hai quả khác màu.

A. 0,25

B. 0,26

C. 0,62

D. 0,52

**Hướng dẫn**

Gọi A: “ Quả lấy từ hộp thứ nhất màu đỏ”;

B: “ Quả lấy từ hộp thứ hai màu đỏ”.

Ta thấy A và B độc lập.

a) Cần tính  $P(A \cap B)$ . Ta có  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} = 0,24$ .

b) Cần tính xác suất của:  $C = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

Do tính xung khắc và độc lập của các biến cố, ta có:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B}) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0,48 \end{aligned}$$

c) Cần tính  $P(\bar{C})$ . Ta có:  $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,48 = 0,52$ .

**Ví dụ 2:** Một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp sau:

a. Lấy được 3 viên bi đỏ.

A.  $\frac{7}{44}$       B.  $\frac{7}{11}$       C.  $\frac{7}{12}$       D.  $\frac{7}{33}$

b. Lấy được ít nhất 2 viên bi đỏ.

A.  $\frac{7}{44}$       B.  $\frac{7}{11}$       C.  $\frac{7}{12}$       D.  $\frac{7}{33}$

**Hướng dẫn**

a)  $P = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44}$

b)  $P = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} + \frac{C_5^1 \cdot C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{7}{11}$

**Ví dụ 3:** Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là: 1kg, 2kg,..., 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân. Tính xác suất để trọng lượng 3 quả cân được chọn không quá 9 kg.



A.  $\frac{1}{8}$

B.  $\frac{2}{8}$

C.  $\frac{3}{8}$

D.  $\frac{5}{8}$

**Hướng dẫn**

Gọi A là biến cố chọn được 3 quả cân có tổng trọng lượng không vượt quá 9 kg.

$$A = \{(1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 2, 5); (1, 2, 6); (1, 3, 4); (1, 3, 5); (2, 3, 4)\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{7}{C_8^3} = \frac{1}{8}$$

**Ví dụ 4:** Cho tập hợp  $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Lấy ngẫu nhiên ra 2 phần tử của E. Tìm xác suất để 2 số lấy ra đều chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 7.

A.  $\frac{6}{45}$

B.  $\frac{4}{45}$

C.  $\frac{8}{45}$

D.  $\frac{10}{45}$

**Hướng dẫn**

Gọi A là biến cố để 2 số lấy ra đều chẵn và có tổng nhỏ hơn 7.

$$A = \{(0, 2); (0, 4); (0, 6); (0, 8)\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{4}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$$

**Ví dụ 5:** Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lý chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để:

a. Cả 6 người là nam.

A.  $\frac{3}{210}$

B.  $\frac{1}{210}$

C.  $\frac{7}{210}$

D.  $\frac{13}{210}$

b. Có 4 nam và 2 nữ.

A.  $\frac{3}{7}$

B.  $\frac{4}{7}$

C.  $\frac{5}{7}$

D.  $\frac{6}{7}$

c. Có ít nhất 2 nữ.

A.  $\frac{33}{42}$

B.  $\frac{25}{42}$

C.  $\frac{3}{42}$

D.  $\frac{37}{42}$

**Hướng dẫn**

Có tất cả  $C_{10}^6$  cách chọn ngẫu nhiên.

$$a) P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$$

$$b) P = \frac{C_6^4 \cdot C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

$$c) P = \frac{C_6^4 \cdot C_4^2 + C_6^3 \cdot C_4^3 + C_6^2 \cdot C_4^4}{C_{10}^6} = \frac{37}{42}$$

**Bài tập rèn luyện**

**Bài 1:** Một đoàn tàu có 3 toa đỗ ở một sân ga, có 5 khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên 1 toa. Tính xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách lên tàu.

A.  $\frac{50}{81}$

B.  $\frac{40}{81}$

C.  $\frac{33}{81}$

D.  $\frac{52}{81}$

**Hướng dẫn**

Có tất cả:  $3^5$  khả năng xảy ra. Vì chỉ xảy ra 2 trường hợp: (1;2;2) và (1;1;3).

$$\Rightarrow P = \frac{3C_5^1 \cdot C_4^2 + 3C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3}{3^5}$$

**Bài 2:** Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã đề sẵn địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ.

A.  $\frac{5}{8}$

B.  $\frac{1}{8}$

C.  $\frac{3}{8}$

D.  $\frac{7}{8}$

**Hướng dẫn**

Có tất cả:  $4! = 24$  cách bỏ thư vào bì thư.

Có 4 khả năng xảy ra là:

- Cả 4 lá đúng địa chỉ.
- 3 lá đúng địa chỉ.

- 2 lá đúng địa chỉ.
- 1 lá đúng địa chỉ.

$$\Rightarrow \text{Có: } 1 + C_4^3 + C_4^2 + C_4^1 = 1 + 4 + 6 + 4 = 15 \Rightarrow P = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

**Bài 3:** Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để:

a. Tất cả 10 thẻ đều mang số chẵn.

A.  $\frac{1}{10005}$

B.  $\frac{1}{10006}$

C.  $\frac{2}{10005}$

D.  $\frac{1}{10007}$

b. Có đúng 5 thẻ mang số chia hết cho 3.

A. 0,13

B. 0,26

C. 0,14

D. 0,28

c. Có 5 thẻ mang số lẻ, 5 thẻ mang số chẵn trong đó có 1 số chia hết cho 10.

A.  $\frac{108}{8671}$

B.  $\frac{108}{8670}$

C.  $\frac{110}{8671}$

D.  $\frac{100}{8671}$

### Hướng dẫn

$$a. P = \frac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}}; \quad b. P = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{20}^5}{C_{30}^{10}}; \quad c. P = \frac{C_{10}^5 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^4}{C_{30}^{10}}$$

**Bài 4:** Một máy bay có 3 bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Giả sử các bộ phận A, B, C tương ứng chiếm 15%; 30%; 55% diện tích máy bay. Máy bay bị rơi nếu có 1 viên đạn trúng vào A, hoặc 2 viên trúng vào B hoặc 3 viên trúng vào C. Tính xác suất máy bay bị rơi nếu:

a. Máy bay bị trúng 2 viên đạn.

A. 0,35

B. 0,36

C. 0,3675

D. 0,3

b. Máy bay bị trúng 3 viên đạn.

A. 0,5

B. 0,6

C. 0,7

D. 0,72775

### Hướng dẫn

a) Gọi A là biến cố: “ Có ít nhất 1 viên trúng A”

B là biến cố: “ Cả 2 viên trúng B”

$$\Rightarrow P(A) = 1 - (0,3 + 0,55)^2 \Rightarrow P(A) = 1 - (0,3 + 0,55)^2$$

$$P(B) = (0,3)^2$$

$$\Rightarrow \text{Xác suất máy bay rơi: } P = P(A) + P(B) = 0,3675$$

b) Máy bay không bị rơi khi có: 1 viên vào B và 2 viên vào C. Xác suất của biến cố này là:  $3 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,55)^2$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - (0,55)^2; P(B) = 3 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,55)^2$$

$$\Rightarrow P\{\text{máy bay rơi}\} = 1 - 3 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,55)^2 = 0,72775$$

**Bài 5:** Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền, mỗi người được sút 1 quả với xác suất bàn tương ứng là: 0,8 và 0,7. Tính xác suất để có ít nhất 1 cầu thủ làm bàn.

- A. 0,8      B. 0,9      C. 0,94      D. 0,49

**Hướng dẫn**

$$P\{\text{cả 2 đá trượt}\} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06 \Rightarrow P = 1 - 0,06 = 0,94$$

**Bài 6:** Trong tuần lễ vừa qua Thành phố có 7 vụ tai nạn giao thông. Tính xác suất để mỗi ngày có 1 tai nạn xảy ra.

- A. 0,006      B. 0,005      C. 0,004      D. 0,003

**Hướng dẫn**

$$\text{Có tất cả: } 7^7 \text{ khả năng xảy ra} \Rightarrow P = \frac{7!}{7^7}$$

**Bài 7:** Gieo đồng thời 3 con xúc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất “ 2 mặt lục”. Tìm xác suất để trong 5 ván chơi, bạn thắng ít nhất 3 ván.

- A. 0,0068      B. 0,0054      C. 0,0042      D. 0,0036

**Hướng dẫn**

$$\text{Xác suất thắng trong 1 ván là: } C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

Xác suất để thắng ít nhất 3 ván là:  $C_5^3 \cdot \left(\frac{2}{27}\right)^3 \left(\frac{25}{27}\right)^2 + C_5^4 \cdot \left(\frac{2}{27}\right)^4 \left(\frac{25}{27}\right) + \left(\frac{2}{27}\right)^5 = \frac{52032}{27^5}$

**Bài 8:** Ở một nước có 50 tỉnh, mỗi tỉnh có 2 Đại biểu Quốc hội. Người ta chọn ngẫu nhiên 50 Đại biểu từ 100 Đại biểu để thành lập 1 Ủy ban. Tính xác suất để trong ủy ban có ít nhất 1 Đại biểu của thủ đô.

A. 0,7423

B. 0,7

C. 0,7324

D. 0,7243

### Hướng dẫn

$$P = 1 - \frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} = 0,7423$$

**Bài 9.** Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng năm học. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A.

A.  $\frac{11}{21}$ B.  $\frac{12}{21}$ C.  $\frac{13}{21}$ D.  $\frac{14}{21}$ 

### Hướng dẫn

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là  $\Omega$

Số phần tử của không gian mẫu là:  $C_9^5 = 126$

Gọi A là biến cố “Chọn 5 học sinh từ đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba lớp và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A”.

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là :

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C

+ 3 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 1 học sinh lớp 12C

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:  $C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 + C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 + C_4^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = 78$ .

Xác suất cần tìm là  $P = \frac{78}{126} = \frac{13}{21}$ .

**Bài 10.** Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau gồm 12 quả đỏ và 8 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên (đồng thời) 3 quả. Tính xác suất để có ít nhất một quả cầu màu xanh.

A.  $\frac{46}{57}$

B.  $\frac{47}{57}$

C.  $\frac{48}{57}$

D.  $\frac{49}{57}$

### Hướng dẫn

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{20}^3$

Gọi A là biến cố “Chọn được ba quả cầu trong đó có ít nhất một quả cầu màu xanh”

Thì  $\bar{A}$  là biến cố “Chọn được ba quả cầu màu đỏ”  $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_{12}^3 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}$

Vậy xác suất của biến cố A là  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{46}{57}$

### Bài tập rèn luyện

#### Quy tắc đếm

**Câu 1.** Cho 6 chữ số 2,3,4,5,6,7. Hỏi có bao nhiêu số gồm 3 chữ số được lập thành từ 6 chữ số đó?

A. 36

B. 18

C. 256

D. 216

**Câu 2.** Cho 6 chữ số 4,5,6,7,8,9. Hỏi có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau được lập thành từ 6 chữ số đó?

A. 120

B. 180

C. 256

D. 216

**Câu 3.** Số các số tự nhiên có 2 chữ số mà 2 chữ số đó là số chẵn là

A. 15

B. 16

C. 18

D. 20

**Câu 4.** Bạn muốn mua một cây bút mực và cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu mực khác nhau, và các cây bút chì cũng có 4 màu khác nhau. Như thế bạn có số cách lựa chọn là.

A. 64

B. 16

C. 32

D. 20

**Câu 5.** Số các số gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 là

A. 3260

B. 3024

C. 5436

D. 12070

- Câu 6.** Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau (số hàng nghìn khác 0). Đáp số của bài toán này là  
A. 2240                      B. 3280                      C. 2650                      D. Một kết quả khác
- Câu 7.** Cho các số 0,1,2,3,4,5. Từ các chữ số đã cho ta lập được bao nhiêu số chia hết cho 5, biết rằng số này có 3 chữ số và 3 chữ số đó khác nhau từng đôi một?  
A. 40                      B. 38                      C. 36                      D. Một kết quả khác
- Câu 8.** Cho các số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau:  
A. 12                      B. 24                      C. 64                      D. 256
- Câu 9.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà các chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị?  
A. 40                      B. 45                      C. 50                      D. 55
- Câu 10.** Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 3 và 2:  
A. 12                      B. 16                      C. 17                      D. 20
- Câu 11.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số:  
A. 900                      B. 901                      C. 899                      D. 999
- Câu 12.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số lập từ các số 0, 2, 4, 6, 8 với điều các chữ số đó không lặp lại:  
A. 60                      B. 40                      C. 48                      D. 10
- Câu 13.** Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng:  
A. 100                      B. 91                      C. 10                      D. 90
- Câu 14.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả tráng miệng trong 5 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 3 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn:  
A. 25                      B. 75                      C. 100                      D. 15
- Câu 15.** Từ các chữ số 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số?  
A. 256                      B. 120                      C. 24                      D. 16
- Câu 16.** Cho 6 chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số lập từ 6 chữ số đó:  
A. 36                      B. 18                      C. 256                      D. 108

**Câu 17.** Cho 6 chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau lập thành từ 6 chữ số đó:

- A. 60                      B. 180                      C. 256                      D. 216

**Câu 18.** Bạn muốn mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau, các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

- A. 64                      B. 16                      C. 32                      D. 20

**Câu 19.** Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 10:

- A. 4536                      B. 9000                      C. 90000                      D. 15120

**Câu 20.** Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho, lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau:

- A. 160                      B. 156                      C. 752                      D. 240

**Câu 21.** Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5:

- A. 60                      B. 80                      C. 240                      D. 600

**Câu 22.** Cho hai tập hợp  $A = \{a, b, c, d\}$ ;  $B = \{c, d, e\}$ . Chọn khẳng định **Sai** trong các khẳng định sau:

- A.  $N(A) = 4$                       B.  $N(B) = 3$                       C.  $N(A \cup B) = 7$                       D.  $N(A \cap B) = 2$

**Câu 23.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau:

- A. 4536                      B.  $4^9$                       C. 2156                      D. 4530

**Câu 24.** Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (Có thể thăm một bạn nhiều lần).

- A. 7!                      B. 35831808                      C. 12!                      D. 3991680

**Câu 25.** Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)

- A. 3991680                      B. 12!                      C. 35831808                      D. 7!

**Câu 26.** Cho các số 1, 2, 5, 7, 9 có bao nhiêu cách chọn ra một số gồm 3 chữ số khác nhau từ 5 chữ số đã cho:

- A. 120                      B. 256                      C. 60                      D. 36

**Câu 27.** Cho các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số lấy từ 7 chữ số trên sao cho chữ số đầu tiên bằng 3 là:



A.  $7^5$

B.  $7!$

C. 240

D. 2401

**Câu 28.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

A. 6

B. 72

C. 720

D. 144

**Câu 29.** Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. không có con đường nào nối từ thành phố C đến thành phố B. Hỏi có bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D:

A. 6

B. 12

C. 18

D. 36

**Câu 30.** Từ các số 1, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có các chữ số khác nhau:

A. 6

B. 8

C. 12

D. 15

**Câu 31.** Có bao nhiêu số có 2 chữ số, mà tất cả các chữ số đều lẻ:

A. 25

B. 20

C. 30

D. 10

**Câu 32.** Số điện thoại ở Huyện Củ Chi có 7 chữ số và bắt đầu bởi 3 chữ số đầu tiên là 790. Hỏi ở Huyện Củ Chi có tối đa bao nhiêu máy điện thoại:

A. 1000

B. 100000

C. 10000

D. 1000000

**Câu 33.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số lớn hơn 4 và đôi một khác nhau:

A. 240

B. 120

C. 360

D. 24

**Câu 34.** Từ các số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số khác nhau và mỗi số có các chữ số khác nhau:

A. 15

B. 20

C. 72

D. 36

### Hoán Vị - Chỉnh Hợp - Tổ Hợp

**Câu 35.** Một liên đoàn bóng rổ có 10 đội, mỗi đội đấu với mỗi đội khác hai lần, một lần ở sân nhà và một lần ở sân khách. Số trận đấu được sắp xếp là:

A. 45

B. 90

C. 100

D. 180

**Câu 36.** Giả sử ta dùng 5 màu để tô cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là:

A.  $\frac{5!}{2!}$

B. 8

C.  $\frac{5!}{3!2!}$

D.  $5^3$

**Câu 37.** Số tam giác xác định bởi các đỉnh của một đa giác đều 10 cạnh là:

A. 35

B. 120

C. 240

D. 720

**Câu 38.** Nếu tất cả các đường chéo của đa giác đều 12 cạnh được vẽ thì số đường chéo là:

- A. 121                      B. 66                      C. 132                      D. 54

**Câu 39.** Nếu một đa giác đều có 44 đường chéo, thì số cạnh của đa giác là:

- A. 11                      B. 10                      C. 9                      D. 8

**Câu 40.** Sau bữa tiệc, mỗi người bắt tay một lần với mỗi người khác trong phòng. Có tất cả 66 lần bắt tay. Hỏi trong phòng có bao nhiêu người:

- A. 11                      B. 12                      C. 33                      D. 67.

**Câu 41.** Số tập hợp con có 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là:

- A.  $C_7^3$                       B.  $A_7^3$                       C.  $\frac{7!}{3!}$                       D. 7

**Câu 42.** Tên 15 học sinh được ghi vào 15 tờ giấy để vào trong hộp. Chọn tên 4 học sinh để cho đi du lịch. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các học sinh:

- A. 4!                      B. 15!                      C. 1365                      D. 32760

**Câu 43.** Một hội đồng gồm 2 giáo viên và 3 học sinh được chọn từ một nhóm 5 giáo viên và 6 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

- A. 200                      B. 150                      C. 160                      D. 180

**Câu 44.** Một tổ gồm 12 học sinh trong đó có bạn An. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 em đi trực trong đó phải có An:

- A. 990                      B. 495                      C. 220                      D. 165

**Câu 45.** Từ một nhóm 5 người, chọn ra các nhóm ít nhất 2 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn:

- A. 25                      B. 26                      C. 31                      D. 32

**Câu 46.** Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

**Câu 47.** Một tổ gồm 7 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 em đi trực sao cho có ít nhất 2 nữ?

- A.  $(C_7^2 + C_6^5) + (C_7^1 + C_6^3) + C_6^4$                       B.  $(C_7^2 \cdot C_6^2) + (C_7^1 \cdot C_6^3) + C_6^4$   
C.  $C_{11}^2 \cdot C_{12}^2$                       D. Đáp số khác

**Câu 48.** Số cách chia 10 học sinh thành 3 nhóm lần lượt gồm 2, 3, 5 học sinh là:

- A.  $C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^5$                       B.  $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5$                       C.  $C_{10}^2 + C_8^3 + C_5^5$                       D.  $C_{10}^5 + C_5^3 + C_2^2$

**Câu 49.** Trong các câu sau câu nào *sai*?

A.  $C_{14}^3 = C_{14}^{11}$

B.  $C_{10}^3 + C_{10}^4 = C_{11}^4$

C.  $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16$

D.  $C_{10}^4 + C_{11}^4 = C_{11}^5$

Câu 50. Mười hai đường thẳng có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

A. 12

B. 66

C. 132

D. 144

Câu 51. Cho biết  $C_n^{n-k} = 28$ . Giá trị của  $n$  và  $k$  lần lượt là:

A. 8 và 4

B. 8 và 3

C. 8 và 2

D. Không thể tìm được

Câu 52. Có tất cả 120 cách chọn 3 học sinh từ nhóm  $n$  (chưa biết) học sinh. Số  $n$  là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A.  $n(n+1)(n+2) = 120$

B.  $n(n+1)(n+2) = 720$

C.  $n(n-1)(n-2) = 120$

D.  $n(n-1)(n-2) = 720$

Câu 53. Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

A.  $7!$

B.  $7^4$

C.  $7.6.5.4$

D.  $7!.6!.5!.4!$

Câu 54. Số cách chọn một ban chấp hành gồm một trưởng ban, một phó ban, một thư kí và một thủ quỹ được chọn từ 16 thành viên là:

A. 4

B.  $\frac{16!}{4}$

C.  $\frac{16!}{12!.4!}$

D.  $\frac{16!}{12!}$

Câu 55. Trong một buổi hoà nhạc, có các ban nhạc của các trường đại học từ Huế, Đà Nẵng, Quy Nhơn, Nha Trang, Đà Lạt tham dự. Tìm số cách xếp đặt thứ tự để các ban nhạc Nha Trang sẽ biểu diễn đầu tiên.

A. 4

B. 20

C. 24

D. 120

Câu 56. Ông và bà An cùng có 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An hay bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng:

A. 720

B. 1440

C. 20160

D. 40320

Câu 57. Có bao nhiêu cách xếp 5 sách Văn khác nhau và 7 sách Toán khác nhau trên một kệ sách dài nếu các sách Văn phải xếp kề nhau?

A.  $5!.7!$

B.  $2.5!.7!$

C.  $5!.8!$

D.  $12!$

Câu 58. Từ các số 0, 1, 2, 7, 8, 9 tạo được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

A. 120

B. 216

C. 312

D. 360

Câu 59. Từ các số 0, 1, 2, 7, 8, 9 tạo được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số khác nhau?

A. 288

B. 360

C. 312

D. 600

**Câu 60.** Trong tủ sách có tất cả 10 cuốn sách. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho quyển thứ nhất ở kệ quyển thứ hai:

- A. 10!                      B. 725760                      C. 9!                      D.  $9! - 2!$

**Câu 61.** Trong một hộp bánh có 6 loại bánh nhân thịt và 4 loại bánh nhân đậu xanh. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 bánh để phát cho các em thiếu nhi:

- A. 240                      B. 151200                      C. 14200                      D. 210

**Câu 62.** Cho một tập hợp có  $n$  phần tử. Số tập con khác rỗng của nó là :

- A.  $2n$                       B.  $2^n + 1$                       C.  $2n + 1$                       D.  $2^n - 1$

**Câu 63.** Hội đồng quản trị của một công ty có 10 người. Có bao nhiêu cách cử một ban quản trị gồm: Chủ tịch, phó chủ tịch, thư kí và 2 uỷ viên. Biết rằng 2 uỷ viên được đề cử cuối cùng và trong họ, không ai giữ 2 chức vụ .

- A. 735                      B. 15120                      C. 30240                      D. Đáp án khác

**Câu 64.** Cho các chữ số 1, 2, 5, 7, 8, Có bao nhiêu cách thành lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ năm chữ số trên sao cho số tạo thành nhỏ hơn 278 ?

- A. 20                      B. 18                      C. 45                      D. 36

**Câu 65.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó có chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau ?

- A. 450                      B. 900                      C. 270                      D. 504

**Câu 66.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam ngồi cạnh nhau:

- A. 6                      B. 72                      C. 720                      D. 144

**Câu 67.** Một đội xây dựng có 3 kỹ sư, 7 công nhân, lập tổ công tác có 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác gồm 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân tổ viên

- A. 360                      B. 120                      C. 240                      D. 420

**Câu 68.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3

- A. 3204                      B. 2942                      C. 7440                      D. Đáp án khác

**Câu 69.** Một nhóm học sinh gồm 7 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh (có cả nam và nữ) lên bảng giải bài tập

- A.  $C_7^1 C_5^2 + C_7^3 C_5^0$                       B.  $C_7^2 C_5^1 + C_7^3 C_5^2$

C.  $C_7^1 C_5^2 + C_7^2 C_5^1$

D.  $C_7^3 - (C_7^1 C_5^2 + C_7^2 C_5^1)$

**Câu 70.** Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu hai bạn nữ đứng cạnh nhau

A.  $2! \cdot 3!$

B.  $5!$

C.  $2 \cdot 2! \cdot 3!$

D.  $4 \cdot 2! \cdot 3!$

**Câu 71.** Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi xanh, 7 bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách lấy được 3 viên bi trong đó chỉ có 2 màu

A. 371

B. 203

C. 217

D. Đáp án khác

**Câu 72.** Cho đa giác đều  $n$  đỉnh,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Tìm  $n$  biết rằng đa giác đó có 135 đường chéo

A.  $n = 15$

B.  $n = 27$

C.  $n = 8$

D.  $n = 18$

**Câu 73.** Một hộp chứa 20 quả cầu trong đó có 12 quả đỏ, 8 quả xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy được 3 quả trong đó có ít nhất 1 quả xanh

A. 900

B. 920

C. 220

D. Đáp án khác

**Câu 74.** Một hộp đựng 8 bi xanh và 4 bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra được 3 bi cùng màu

A. 60

B. 360

C. 224

D. 8064

**Câu 75.** Một đội bóng chuyên nam trường Bạch Đằng có 12 học sinh gồm 7 học sinh K12, 5 học sinh K11. Trong 1 trận đấu, huấn luyện viên cần chọn ra 6 bạn, trong đó có ít nhất 4 bạn K12. Hỏi có bao nhiêu cách.

A. 495

B. 924

C. 462

D. Đáp án khác

**Câu 76.** Có 8 bạn nam và 8 bạn nữ xếp thành 1 hàng dọc, hỏi có bao nhiêu cách xếp

A. 64

B.  $16^2$

C.  $16!$

D.  $8! \cdot 8!$

**Câu 77.** Số các tổ hợp chập  $k$  của một tập hợp gồm  $n$  phần tử ( $1 \leq k \leq n$ )

A.  $C_n^k = \frac{A_n^k}{(n-k)!}$

B.  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$

C.  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

D.  $C_n^k = \frac{k!(n-k)!}{n!}$

**Câu 78.** Số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n$

A.  $n = 5; n = 12$

B.  $n = 5; n = 6$

C.  $n = 6$

D.  $n = 6; n = 12$

**Câu 79.** Số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$

A. 16

B. 15

C. 14

D. 13

**Câu 80.** Số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n + 6$

A. 12

B. 11

C. 13

D. 14

**Câu 81.** Trong hộp kín đựng 2 bi đỏ, 5 bi trắng, 7 bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi có đủ 3 màu.

A.  $C_2^1 C_5^2 C_7^2 + C_2^2 C_5^1 C_7^1 + C_2^1 C_5^2 C_7^2$

B.  $C_2^1 C_5^1 C_7^2 \cdot C_2^2 C_5^1 C_7^1 \cdot C_2^1 C_5^2 C_7^1$

C.  $C_2^0 C_5^2 C_7^2 + C_2^2 C_5^1 C_7^1 + C_2^1 C_5^2 C_7^1$

D.  $C_2^1 C_5^1 C_7^2 + C_2^2 C_5^1 C_7^1 + C_2^1 C_5^2 C_7^1$

**Câu 82.** Tìm n biết  $C_{n+1}^1 + 3C_{n+2}^2 = C_{n+1}^3$

A. 16

B. 2

C. 12

D. 9

**Câu 83.** Một tổ có 15 học sinh trong đó có 9 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chia tổ thành 3 nhóm sao cho mỗi nhóm có đúng 3 nam và 2 nữ.

A.  $C_9^3 C_6^2 C_6^3$

B.  $C_9^3 C_6^3 C_9^2$

C.  $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$

D.  $C_9^3 C_6^2 C_6^3 C_4^2$

**Câu 84.** Dùng sáu chữ số 1;2;3;4;5;6 để viết các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau. Các số mà trong đó bắt đầu bằng 12 là :

A.  $P_4$

B.  $A_4^2$

C.  $C_4^2$

D.  $A_6^4$

**Câu 85.** Một hộp kín đựng 6 bi xanh và 4 bi đỏ có kích thước và trọng lượng khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 5 bi trong đó có 3 bi đỏ

A. 60

B. 720

C. 54

D. Đáp án khác

**Bảng đáp án**

1.D	2.A	3.D	4.C	5.B	6.A	7.C	8.B	9.B	10.C
11.A	12.C	13.D	14.B	15.A	16.D	17.A	18.A	19.B	20.B
21.D	22.C	23.A	24.B	25.A	26.C	27.D	28.B	29.B	30.D
31.A	32.C	33.B	34.A	35.B	36.C	37.B	38.D	39.A	40.B
41.A	42.C	43.A	44.D	45.B	46.C	47.B	48.B	49.D	50.B
51.C	52.D	53.C	54.D	55.C	56.B	57.C	58.C	59.A	60.B
61.D	62.D	63.B	64.A	65.B	66.D	67.D	68.C	69.C	70.D
71.A	72.D	73.B	74.A	75.C	76.C	77.B	78.B	79.D	80.A
81.A	82.C	83.D	84.A	85.A					

## Dãy Số - Cấp Số Cộng - Cấp Số Nhân

### I. Lý thuyết cần nắm

#### 1. Dãy số

**Định nghĩa :** Dãy số là hàm số với đối số là số tự nhiên

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n)$$

**Dãy số tăng, dãy số giảm**

- $(u_n)$  là dãy số tăng  $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$   
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$   
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$
- $(u_n)$  là dãy số giảm  $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$   
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$   
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$

**Dãy số bị chặn**

- $(u_n)$  là dãy số bị chặn trên  $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- $(u_n)$  là dãy số bị chặn dưới  $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: u_n > m, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- $(u_n)$  là dãy số bị chặn  $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 2. Cấp số cộng

**Định nghĩa :** Dãy số  $(u_n)$  là cấp số cộng  $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$d$  là số không đổi, gọi là công sai của cấp số cộng.

**Số hạng tổng quát :**  $u_n = u_1 + (n-1)d, (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ .

**Tính chất :**  $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$ .

**Tổng  $n$  số hạng đầu tiên :**

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

#### 3. Cấp số nhân

**Định nghĩa :** Dãy số  $(u_n)$  là cấp số nhân  $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$q$  là số không đổi, gọi là công bội của cấp số nhân.

**Số hạng tổng quát :**  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ .

**Tính chất :**  $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$ .

**Tổng  $n$  số hạng đầu tiên :**

$$\begin{cases} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{cases}$$

## II. Ví dụ mẫu

**Câu 1:** Trong các dãy số  $(u_n)$  sau, dãy số nào tăng?

A.  $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

B.  $u_n = \frac{n}{n+1}$

C.  $u_n = \frac{2}{n(n+1)}$

D.  $u_n = \frac{n+1}{n}$

## Hướng dẫn

Để kiểm tra tăng hay giảm các em chỉ cần xét tỉ số  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Nhập biểu thức sau đó CALC n=10

Đáp án A

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \div \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$\frac{2}{3}$

Đáp án B

$\frac{x+1}{(x+1)+1} \div \frac{x}{x+1}$

1.008(3)

Vậy khoanh đáp án B đúng.

**Câu 2:** Cho tổng  $S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ . Khi đó công thức của  $S(n)$  là



$$A.S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad B.S(n) = \frac{n+1}{2} \quad C.S(n) = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} \quad D.S(n) = \frac{n^2(2n+1)}{6}$$

### Hướng dẫn

Dãy số này đúng với n rất lớn thì cũng sẽ đúng tới n=100

Ta sẽ tính  $S(100) = \sum_{X=1}^{X=100} X^2$

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\log} \boxed{\square} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\square} \boxed{x^2} \boxed{\nabla} \boxed{1} \boxed{\blacktriangle} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=}$   
 $\sum_{x=1}^{100} (x^2)$   
 338350

Sau đó xét hiệu với các đáp án

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{(\leftarrow)}$

Ans→A

338350  
 $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{(\rightarrow)} \boxed{-} \boxed{=}$   $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{(\leftarrow)}$   $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{+}$   $\boxed{1} \boxed{(\leftarrow)}$   $\boxed{2} \boxed{\times}$   $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{+}$   $\boxed{1} \boxed{(\leftarrow)}$   $\boxed{\nabla} \boxed{6} \boxed{=}$   
 $A - \frac{100(100+1)(2 \times)}{6}$   
 0

Vậy khoanh đáp án A

**Câu 10:** Tính tổng  $S(n) = 1.1! + 2.2! + \dots + 2007.2007!$ . Khi đó công thức của  $S(n) =$

A.  $2007!$

B.  $2008!$

C.  $2008! - 1$

D.  $2007! - 1$

### Hướng dẫn

Khi biểu thức đúng với một số lớn như vậy thì nó cũng đúng với số nhỏ, ở đây ta sẽ thay  $S(7) = 1.1! + \dots + 7.7!$  ta tính tổng này bằng máy tính

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\log} \boxed{\square} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\square} \boxed{\times} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\square} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{\nabla} \boxed{1} \boxed{\blacktriangle} \boxed{7} \boxed{=}$   
 $\sum_{x=1}^7 (x \times x!)$   
 40319

Xét hiệu với các đáp án

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{(-)}$ 
 $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{(-)} \boxed{=}$ 
 $\boxed{8} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^3} \boxed{=}$ 
 $\boxed{1} \boxed{)} \boxed{=}$

Ans → A      Math ▲      A-(8!-1)      Math ▲

40319      0

Ở đây anh thử luôn đáp án C đúng:  $S(7) = 8! - 1$

**Câu 2:** Xác định x để 3 số  $1-x, x^2, 1+x$  lập thành một CSC.

A. Không có giá trị nào của x      B.  $x=2$  hoặc  $x=-2$       C.  $x=1$  hoặc  $-1$       D.  $x=0$

**Hướng dẫn**

Để 3 số tạo thành cấp số cộng thì:  $d = x^2 - (1-x) = (1+x) - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{(1-x) + (1+x)}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

**Câu 5:** Biết dãy số 2, 7, 12, ..., x là một cấp số cộng. Tìm x biết  $2+7+12+\dots+x=245$

A.  $x=45$       B.  $x=42$       C.  $x=52$       D.  $x=47$

**Hướng dẫn**

Các em viết lại công thức tổng quát của dãy  $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + 5(n-1)$  nếu coi

$$x = u_n = Y \rightarrow n = \frac{Y+3}{5}$$

Các em nhập vào máy tính để tính tổng

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\log}$ 
 $\boxed{2} \boxed{+}$ 
 $\boxed{5} \boxed{)$ 
 $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)$ 
 $\boxed{=}$ 
 $\boxed{1} \boxed{)$ 
 $\boxed{\nabla}$ 
 $\boxed{1} \boxed{\blacktriangle}$ 
 $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{S}\cdot\text{D}}$ 
 $\boxed{+}$ 
 $\boxed{3} \boxed{\nabla} \boxed{5}$

Math ▲

$\frac{Y+3}{5}$   
 $\sum_{x=1} (2+5(X-1))$

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$ 
 $\boxed{4} \boxed{5} \boxed{=}$ 
 $\boxed{\blacktriangleleft} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$ 
 $\boxed{4} \boxed{2} \boxed{=}$ 
 $\boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$ 
 $\boxed{4} \boxed{7} \boxed{=}$

Argument ERROR      Math ▲      Math ▲

$\sum_{x=1} (2+5(X-1))$        $\sum_{x=1} (2+5(X-1))$

$\boxed{[\text{AC}]} : \text{Cancel}$       198      245  
 $\boxed{[\blacktriangleleft]} \boxed{[\blacktriangleright]} : \text{Goto}$

(Báo lỗi cú pháp do  $n \notin \mathbb{N}^*$ )

Vậy khoanh D

**Bài tập rèn luyện**

**Mini Test 1**

**1. Dãy số**

**Câu 1:** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = -2$ ;  $u_n = 2u_{n-1} + n^2$ ,  $n \geq 2$ . Số hạng thứ 4 của dãy số  $(u_n)$  bằng

- A. 0                      B. 93                      C. 9                      D. 34

**Câu 2:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$ ; biết  $u_k = \frac{2}{13}$ .  $u_k$  là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

- A. Thứ ba                      B. Thứ năm                      C. Thứ sáu                      D. Thứ tư

**Câu 3:** Chọn dãy số tăng trong các dãy số có số hạng tổng quát sau đây:

- A.  $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$                       B.  $u_n = (-1)^{2n}$                       C.  $u_n = 1 + (-1)^n$                       D.  $u_n = \frac{n}{3n^2+1}$

**Câu 4:** Cho dãy số  $u_n = (-1)^n$ . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau đây?

- A. Dãy tăng                      B. Dãy giảm                      C. Bị chặn                      D. Không bị chặn

**Câu 5:** Dãy số  $u_n = \frac{1}{n+1}$  là dãy số có tính chất?

- A. Tăng                      B. Giảm                      C. Không tăng không giảm                      D. Tất cả đều sai

**Câu 6:** Trong các dãy số  $(u_n)$  sau, dãy số nào bị chặn dưới?

(I)  $u_n = n^2 - 4n + 2$ , (II)  $u_n = 1 - 2n^2$ , (III)  $u_n = \frac{n^2}{n+1}$ , (IV)  $u_n = 2 - 3n$

- A. (I) và (II)                      B. (II) và (III)                      C. (I), (III)                      D. (II) và (IV)

**Câu 7:** Trong các dãy số  $(u_n)$  sau, dãy số nào tăng?

- A.  $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$                       B.  $u_n = \frac{n}{n+1}$                       C.  $u_n = \frac{2}{n(n+1)}$                       D.  $u_n = \frac{n+1}{n}$

**Câu 8:** Tính tổng  $S(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ . Khi đó công thức của  $S(n)$  là?

A.  $S(n) = \frac{n}{n+2}$       B.  $S(n) = \frac{n}{n+1}$       C.  $S(n) = \frac{2n}{2n+1}$       D.  $S(n) = \frac{1}{2^n}$

**Câu 9:** Cho tổng  $S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ . Khi đó công thức của  $S(n)$  là

A.  $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$       B.  $S(n) = \frac{n+1}{2}$       C.  $S(n) = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$       D.  $S(n) = \frac{n^2(2n+1)}{6}$

**Câu 10:** Tính tổng  $S(n) = 1.1! + 2.2! + \dots + 2007.2007!$ . Khi đó công thức của  $S(n) =$

A.  $2007!$       B.  $2008!$       C.  $2008! - 1$       D.  $2007! - 1$

1.B	2.B	3.A	4.C	5.B	6.C	7.B	8.B	9.A	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

## 2. Cấp số sộng

**Câu 1:** Cho CSC có  $u_4 = -12, u_{14} = 18$ . Khi đó số hạng đầu tiên và công sai là

A.  $u_1 = -20, d = -3$       B.  $u_1 = -22, d = 3$       C.  $u_1 = -21, d = 3$       D.  $u_1 = -21, d = -3$

**Câu 2:** Xác định x để 3 số  $1-x, x^2, 1+x$  lập thành một CSC.

A. Không có giá trị nào của x      B.  $x=2$  hoặc  $x=-2$       C.  $x=1$  hoặc  $-1$       D.  $x=0$

**Câu 3:** Trong các dãy số sau đây dãy số nào là CSC?

A.  $u_n = 3^n$       B.  $u_n = (-3)^{n+1}$       C.  $u_n = 3n+1$       D. Tất cả đều là CSC

**Câu 4:** Trong các dãy số sau đây dãy số nào là CSC? B

A.  $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$       C.  $u_n = n^2$       D.  $u_n = (n+1)^3$

**Câu 5:** Biết dãy số 2, 7, 12, ..., x là một cấp số cộng. Tìm x biết  $2+7+12+\dots+x=245$

A.  $x=45$       B.  $x=42$       C.  $x=52$       D.  $x=47$

**Câu 6:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  biết  $u_1 + u_3 = 7$  và  $u_2 + u_4 = 12$ . Tính  $u_{20}$

A. 48,5      B. 47,5      C. 51      D. 49

**Câu 7:** Cho cấp số cộng với  $u_1 = -15$ , công sai  $d = \frac{1}{3}$  và  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$ . Tìm n?

- A.  $n = 0$                       B.  $n = 0$  hoặc  $n = 91$                       C.  $n = 31$                       D.  $n = 91$

**Câu 8:** Một cấp số cộng có  $u_1 = -5$  và  $d=3$  thì  $u_{15}$  bằng :

- A. 27                      B. 37                      C. 47                      D. Đáp án khác

**Câu 9:** Một cấp số cộng có  $u_5 = 7$  và  $u_{10} = 42$ , công sai  $d$  của cấp số cộng này là :

- A. 7                      B. 5                      C. 3                      D. 10

**Câu 10 :** Cho cấp số cộng  $u_n = 5n-2$ , biết  $S_n = 2576$ , Tìm  $n$  ?

- A. 30                      B. 31                      C. 32                      D. 33

**Câu 11 :** Độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Nếu cạnh trung bình bằng 6 thì công sai của cấp số cộng này là :

- A. 7,5                      B. 4,5                      C. 0,5                      D. Đáp án khác

**Câu 12 :** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ . Số hạng đầu của cấp số cộng là :

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**Câu 13 :** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ . Công sai của cấp số cộng là :

- A. 11                      B. 2                      C. 15                      D. 4

**Câu 14:** Cho cấp số cộng với  $u_1 = -15$ , công sai  $d = \frac{1}{3}$  và  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$ . Tìm  $n$ ?

- A.  $n = 0$                       B.  $n = 0$  hoặc  $n = 91$                       C.  $n = 31$                       D.  $n = 91$

**Câu 15:** Cho tổng  $1+2+3+\dots+2017+2016+2015+\dots+2+1$  có kết quả bằng:

- A. 4068289                      B. 4086289                      C. 4067298                      D. 4076289

1.C	2.C	3.C	4.B	5.D	6.A	7.D	8.B	9.A	10.C
11.C	12.C	13.D	14.D	15.A					

### 3. Cấp số nhân

**Câu 1:** Cho CSN có  $u_1 = -\frac{1}{2}, u_7 = -32$ . Khi đó  $q$  là ?

- A.  $\pm \frac{1}{2}$       B.  $\pm 2$       C.  $\pm 4$       D. Tất cả đều sai

**Câu 2:** Cho CSN có  $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$ . Số  $\frac{1}{10^{103}}$  là số hạng thứ bao nhiêu?

- A số hạng thứ 103      B số hạng thứ 104      C số hạng thứ 105      D Đáp án khác

**Câu 3:** Cho CSN có  $u_1 = 3; q = -2$ . Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu?

- A. số hạng thứ 5      B. số hạng thứ 6      C. số hạng thứ 7      D. Đáp án khác

**Câu 4:** Số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  của cấp số nhân  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$  là :

- A.  $u_1 = 5; q = 2$       B.  $u_1 = 6; q = 2$       C.  $u_1 = 6; q = 3$       D.  $u_1 = 5; q = 3$

**Câu 5 :** Xen giữa số 3 và số 19683 là 7 số để được một cấp số nhân có  $u_1 = 3$ . Khi đó  $u_5$  là:

- A. -243      B. 729      C.  $\pm 243$       D. 243

**Câu 6 :** Trong các dãy số sau, dãy số nào là CSN.

- A.  $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$       B.  $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$       C.  $u_n = n + \frac{1}{3}$       D.  $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$

**Câu 7 :** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$ . Giá trị  $u_1$  và  $q$  là:

- A.  $u_1 = 2; q = 5$  hoặc  $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$       B.  $u_1 = 5; q = 1$  hoặc  $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$   
C.  $u_1 = 25; q = 5$  hoặc  $u_1 = 1; q = \frac{1}{5}$       D.  $u_1 = 1; q = 5$  hoặc  $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$

**Câu 8:** Cho CSN có  $u_2 = \frac{1}{4}; u_5 = 16$ . Tìm  $q$  và số hạng đầu tiên của CSN?

- A.  $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$       B.  $q = -\frac{1}{2}; u_1 = -\frac{1}{2}$       C.  $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}$       D.  $q = -4; u_1 = -\frac{1}{16}$

**Câu 9:** Xác định  $x$  để 3 số  $2x-1; x; 2x+1$  lập thành CSN?

- A.  $x = \pm \frac{1}{3}$       B.  $x = \pm \sqrt{3}$       C.  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$       D. Không có giá trị nào của  $x$

**Câu 10:** Cho cấp số nhân  $2; x; 18$ . Kết quả nào đúng :

- A.  $x=6$                       B.  $x=9$                       C.  $x=8$                       D.  $x=10$ .

**Câu 11:** Cho cấp số nhân  $-2; x; -18; y$ . Hãy chọn kết quả đúng :

- A.  $x=-6; y=54$       B.  $x=6; y=-54$       C.  $x=-6; y=-54$       D.  $x=-10; y=-26$

<b>1.B</b>	<b>2.B</b>	<b>3.C</b>	<b>4.B</b>	<b>5.D</b>	<b>6.B</b>	<b>7.D</b>	<b>8.C</b>	<b>9.C</b>	<b>10.A</b>
<b>11.C</b>									

Các em muốn làm nhiều bài tập hơn nữa thì truy cập vào <http://bikiptheluc.com/sach> nhé, vì nội dung gồm cả 11+12 nên khá nhiều do đó bài tập phần lớp 11 ở cuốn cơ bản này anh đã cắt vợi và đẩy lên file online để các em rèn luyện thêm.

## Skill Giới Hạn – Đạo Hàm

## I. Kỹ thuật Casio tính nhanh Giới Hạn

Chúng ta sử dụng ứng dụng của tính năng **CALC**, các em xét ví dụ sau :

**Ví dụ 1:** Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3}$

A.  $\frac{4}{15}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{5}$

D.  $\frac{-4}{15}$

## Hướng dẫn

<b>Bước 1:</b> Các em nhập biểu thức $\frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3}$ $\left[ \frac{\square}{\square} \right] \left[ \sqrt{\square} \right] \left[ 2 \right] \left[ \text{ALPHA} \right] \left[ \right] \left[ + \right] \left[ 7 \right] \left[ \right] \left[ + \right] \left[ \text{ALPHA} \right] \left[ \right] \left[ - \right] \left[ 4 \right] \left[ \right] \left[ \text{ALPHA} \right] \left[ \right] \left[ \text{SHIFT} \right]$ $\left[ x^2 \right] \left[ - \right] \left[ 4 \right] \left[ \text{ALPHA} \right] \left[ \right] \left[ x^2 \right] \left[ + \right] \left[ 3 \right]$	$\frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3}$
<b>Bước 2:</b> Bấm <b>CALC</b> $x = x_0 + \Delta x$ $\left[ \text{CALC} \right] \left[ 1 \right] \left[ \cdot \right] \left[ 0 \right] \left[ 0 \right] \left[ 0 \right] \left[ 0 \right] \left[ 0 \right] \left[ 1 \right] \left[ = \right]$	$\frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3}$ $-0.2666666067$
<b>Bước 3:</b> Khoanh đáp án đúng	$\frac{-4}{15}$ $-0.2(6)$

Vậy tổng quát cho bài tính  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  thì các em tính giá trị của  $f(x)$  tại  $a + 0.0000001$

Ngoài ra đối với dạng  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  các em có thể dùng công thức Lopital  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  khi

đó nó sẽ mất dạng  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  và chỉ việc tính  $\frac{f'(x)|_{x=a}}{g'(x)|_{x=a}}$

**Ví dụ 2:** Tính  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ , với  $a > 0$

A.  $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

B.  $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$

C.  $\frac{1}{\sqrt{a}}$

D.  $-\frac{1}{\sqrt{a}}$

## Hướng dẫn:



Các em chọn luôn  $a=100$  ta được :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{100}+\sqrt{x-100}}{\sqrt{x^2-100^2}} \quad \text{Ans} \rightarrow A$$

$$0.07071179615 \quad 0.07071179615$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2 \times 100}} \quad 0^\circ 0' 0''$$

Vậy khoanh đáp án A.

**Ví dụ 3:** Biết  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2+n-1} = \frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính tổng  $a+b$ .

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

**Hướng dẫn:**

Các em chọn  $n=100$ , các em có thể nhớ công thức tính  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  hoặc dùng chức năng tính tổng của máy tính

$$\sum_{x=1}^{100} (X) \quad 5050 \quad \frac{50}{199}$$

Kết quả này xấp xỉ  $\frac{1}{4} \rightarrow a+b=5$  các em muốn chính xác cao thì cho  $n$  to lên là được.

**Ví dụ 4:** Tính  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017^n + 6 \cdot 2018^n}{2015^n - 2018^n}$

A. 1

B. -6

C.  $+\infty$ D.  $-\infty$ 

**Hướng dẫn :**

Đây là giới hạn chống casio bằng cách cho hệ số to, khi các em cho  $n$  là  $10^6$  sẽ bị Math Error, để giải dạng này các em chỉ việc giám hệ số và CALC  $n=x=100$

$$\frac{7x+6x8x}{5x-8x} = -6.000001588$$

## II. Kỹ thuật tính nhanh Đạo Hàm

**Ví dụ 1 [Tính đạo hàm cấp 1]:** Cho hàm số  $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ . Hàm số có đạo hàm  $f'(x)$  bằng:

A.  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

B.  $1 + \frac{1}{x^2}$

C.  $x + \frac{1}{x} - 2$

D.  $1 - \frac{1}{x^2}$

### Hướng dẫn

<p><b>Bước 1: Khởi động d/dx và nhập biểu thức cần tính</b></p> <p>SHIFT <math>\frac{d}{dx}</math> <math>\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2</math> <math>\left _{x=2}\right </math></p> <p>Các em chọn x sao cho hàm xác định, ở đây anh chọn x=2</p>	$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \Big _{x=2}$
<p><b>Bước 2: Lưu giá trị đạo hàm của hàm tại x=2 vào A</b></p> <p>SHIFT <math>\frac{d}{dx}</math> <math>\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2</math> <math>\left _{x=2}\right </math></p>	$\frac{d}{dx} \left( \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) \Big _{x=2}$
<p><b>Bước 3: So kết quả với các đáp án</b></p> <p>Vậy khoanh D.</p>	$A - \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right)$

**Ví dụ 2 [Tính đạo hàm cấp 2]:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ . Đạo hàm cấp 2 của hàm số là:

A.  $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$

B.  $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$

C.  $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$

D.  $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$

### Hướng dẫn

Các em sử dụng cách tính đạo hàm cấp 2 bằng Casio như sau:

$$y'' = \frac{\Delta y'}{\Delta x} \quad \text{Tính } \frac{d}{dx}(f(x))\bigg|_{x=X} \rightarrow C \quad \frac{d}{dx}(f(x))\bigg|_{x=X+0.001} \rightarrow D \quad \text{Suy ra: } f''(x) = \frac{D-C}{0.001} \rightarrow A$$

Áp dụng vào bài :

SHIFT F2 F1 = 2 ALPHA ) x<sup>2</sup> + 3 ALPHA ) ▾ 1 = ALPHA ) ►► 2 SHIFT RCL hyp

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-2x^2 + 3x}{1-x} \right) \bigg|_{x=2}$$

◀ DEL ◀ + 0 . 0 0 1 SHIFT RCL sin

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-2x^2 + 3x}{1-x} \right) \bigg|_{x=2}$$

2.998002996

Vậy đạo hàm cấp 2 của hàm số tại x=2 là :

AC F2 ALPHA sin = ALPHA hyp ▾ 0 . 0 0 1 = SHIFT RCL (←)

$$\frac{D-C}{0.001} = A - \frac{2}{(1-2)^3}$$

-1.997003993      0°0'10.79"

Vậy khoanh đáp án B

Ví dụ 3: Cho  $[(4x-3)\sqrt{2x+1}]' \sqrt{2x+1} = mx+n$ . Tính  $A=m-n$ ?

A.  $A=9$ .

B.  $A=7$ .

C.  $A=13$ .

D.  $A=11$ .

**Hướng dẫn**

Biểu thức trên đúng với mọi x nên các em chọn x=100 ta được :

$$\frac{d}{dx}((4x-3)\sqrt{2x+1}) \bigg|_{x=100} = 1201$$

Vậy  $m=12, n=1 \rightarrow m-n=11$

Ví dụ 4: Cho  $\left( \frac{2x^2-3x+5}{x-3} \right)' = \frac{ax^2-bx+c}{(x-3)^2}$ . Tính  $S=a+b+c$ ?

A.  $S=18$ .

B.  $S=0$ .

C.  $S=10$ .

D.  $S=6$ .

Hướng dẫn:

Những dạng này các em tính đạo hàm tại  $X=100$  vì khi các em tính tại  $X=100$  nó sẽ hiện ra các hệ số của hàm bậc 2 ví dụ như

$$2X^2+3X+4$$

$$20304$$

$$\left(\frac{2x^2-3x+5}{x-3}\right)' = \frac{ax^2-bx+c}{(x-3)^2} \Rightarrow ax^2-bx+c = \left(\frac{2x^2-3x+5}{x-3}\right)'(x-3)^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X^2-3X+5}{X-3}\right)\Big|_{x=100}$$

$$18804$$

$\Rightarrow a \cdot 100^2 - b \cdot 100 + c = 18804 \rightarrow a=2, c=4$  các em nhìn ra được ngay  $a$  và  $c$ , để tìm được  $b$  thì ta sẽ mò từ  $20 - 12 = 8$  do đó

$$2X^2-12X+4$$

$$18804$$

Bài tập rèn luyện

Câu 1: Khi tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+2x}}{3-4|x|}$  ta được kết quả là một phân số tối giản dạng

$$\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0. \text{ Tính } a+b ?$$

A.  $a+b=5$

B.  $a+b=-1$

C.  $a+b=-3$

D.  $a+b=7$

Câu 2: Tính giới hạn  $M = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} ?$

A.  $M=1$

B.  $M=0$

C.  $M=3$

D.  $M=-1$

Câu 3: Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + x & \text{khi } x \geq 1 \\ (m^3 - 3m + 3)x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ ?

A.  $m=1; m=-2$

B.  $m=1; m=2$

C.  $m=-1; m=-2$

D.  $m=-1; m=2$

Câu 4: Tìm  $x$  biết  $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$  và  $|x| < 1$

A.  $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

B.  $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

C.  $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

D.  $\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

Câu 5:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$  bằng:

A.  $-\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $-\infty$

D.  $+\infty$

Câu 6: Biết dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $|u_n| \leq \frac{n+2}{n^2}, \forall n \geq 1$ . Khi đó  $\lim u_n$  bằng:

A. 1

B.  $+\infty$

C. 0

D.  $-\infty$

Câu 7:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n)^3 (n+1)^2}{1-4n^5}$  bằng:

A.  $\frac{27}{4}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $-\frac{27}{4}$

D. 0

Câu 8: Giá trị  $\lim \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$  bằng:

A. 1

B. 2

C. 0

D.  $+\infty$

Câu 9: Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn hữu hạn?

A.  $u_n = 3^n + 2^n$

B.  $u_n = \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}$

$$C. u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2+4}}$$

$$D. u_n = \sqrt{n^2+2n}-n$$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số  $y = (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x)$

$$A. y' = 20x^4 - 120x^3 + 27x^2 + 70x$$

$$B. y' = 20x^4 - 120x^3 - 27x^2 - 70x$$

$$C. y' = 20x^4 - 120x^3 - 27x^2 + 70$$

$$D. y' = 20x^4 - 120x^3 - 27x^2 + 70x$$

Câu 11: Giá trị  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2n(6n+5)(n+7)}}$  bằng:

$$A. +\infty$$

$$B. \frac{1}{6}$$

$$C. \frac{1}{2}$$

$$D. \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Câu 12: Giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x-1}$  ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ ) là

$$A. +\infty.$$

$$B. m-n.$$

$$C. 0.$$

$$D. m+n.$$

Câu 13: Giới hạn của dãy số  $u_n = \frac{n^3 + n + 2}{(2n+1)^2(3n-1)}$  bằng  $\frac{a}{4}$ . Khi đó số  $a$  bằng

$$A. 1.$$

$$B. \frac{1}{12}.$$

$$C. \frac{2}{3}.$$

$$D. \frac{1}{3}.$$

Câu 14: Giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$  là

$$A. \frac{1}{3}.$$

$$B. \frac{1}{2}.$$

$$C. 0.$$

$$D. 1.$$

Câu 15: Cho  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} - x) = 5$ . Khi đó giá trị của  $a$  là

$$A. -6.$$

$$B. 10.$$

$$C. -10.$$

$$D. 6.$$

**Câu 16:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{ khi } x > 4 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{ khi } x \leq 4 \end{cases}$ . Tìm a để hàm số f(x) liên tục trên tập xác định.

A.  $a = 3$ .

B.  $a = 2$ .

C.  $a = -\frac{11}{6}$ .

D.  $a = \frac{5}{2}$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x) = x^3$ . Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 3$ .

A.  $x = 1; x = -1$ .

B.  $x = 1$ .

C.  $x = -1$ .

D.  $x = 3$ .

**Câu 18:** Cho  $\left[ (2x^2 - 3)\sqrt{x} \right]' = \frac{ax^2 - b}{2\sqrt{x}}$ . Tính  $P = ab$ ?

A.  $P = 30$ .

B.  $P = -30$ .

C.  $P = 10$ .

D.  $P = -10$ .

**Câu 19:** Cho  $\left( \frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}} \right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$ . Tính  $E = \frac{a}{b}$ ?

A.  $E = -1$ .

B.  $E = 4$ .

C.  $E = -16$ .

D.  $E = -4$ .

**Câu 20:** Cho  $\left( \frac{2x^2 - 3x + 5}{x-3} \right)' = \frac{ax^2 - bx + c}{(x-3)^2}$ . Tính  $S = a + b + c$ ?

A.  $S = 18$ .

B.  $S = 0$ .

C.  $S = 10$ .

D.  $S = 6$ .

1.A	2.C	3.A	4.D	5.B	6.C	7.A	8.A	9.D	10.A
11.B	12.B	13.D	14.B	15.B	16.C	17.A	18.A	19.A	20.A

## Bí Kíp Casio Chinh Phục 7 Ngày 7 Điểm

Version 2017 Ultimate

### I. Giới thiệu

Chào các hạ, ta là sư phụ Lực chỉ còn 7 ngày nữa là thi rồi khi các người đang đọc những dòng này tức là đang nắm trong tay Bí Kíp Tu Luyện Siêu Cấp đạt level 7 trong 7 ngày với tuyệt kĩ Casio cứu dương thần công và đồ long fx - 570 vn plus khuyên các người nên dùng thêm ý thiên kiếm vinacal để giải phương trình nhanh hơn nhưng nó khá kém phần số phức.

Trong bộ kĩ năng này ta sẽ hướng dẫn Casio những dạng chắc chắn có trong đề thi để chinh phục 7 điểm hoàn toàn đơn giản bằng việc làm tốt các dạng bài cơ bản chắc chắn sẽ có trong đề.

### II. Kĩ năng Casio cần nắm

Ở đây ta sẽ hướng dẫn các người 3 chức năng hay dùng nhất là : **Calc, Solve, Table**

#### 1. Kĩ Năng CALC - Chức năng tính giá trị của biểu thức hàm 1 biến

Dùng để thử đáp án : Áp dụng cho những bài đáp án đã cho số cụ thể

Ví dụ 1 [Đề Thử Nghiệm lần 2]: Tìm nghiệm của phương trình  $3^{x-1} = 27$ .

A.  $x=9$ .

B.  $x=3$ .

C.  $x=4$ .

D.  $x=10$ .

#### Hướng dẫn

Thay vì phải nhớ và biến đổi công thức chúng ta xét hiệu :  $3^{x-1} - 27$  các em nhập vào máy tính :

$$3^{x-1}-27$$

Xét đáp án A :

Xét đáp án B

Xét đáp án C



$3^{x-1}-27$

6534

$3^{x-1}-27$

-18

$3^{x-1}-27$

0

Như vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) < \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$  là

A.  $(3; +\infty)$ .

B.  $(1; +\infty)$ .

C.  $(1; 2)$ .

D.  $(2; +\infty)$ .

Hướng dẫn

Các em sẽ lựa chọn giá trị đặc trưng của x ở các đáp án xem có đúng không? Nếu sai thì ta loại ngay được đáp án đó còn nếu đúng thì có khả năng cao đáp án đó đúng

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

Xét đáp án A,B,D đều chứa  $+\infty$  các em thử  $x=10$  xem đúng không?

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

-2

Vậy loại được C chỉ có thể A,B,D đúng tiếp theo tìm xem 3 đáp án trên khác nhau ở điểm gì thì đáp án B rộng hơn và chứa giá trị mà B,C không chứa là  $x=1.1$

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

2.095903274

Như vậy là loại B, tương tự

$\boxed{\text{CALC}} \boxed{2} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{=}$   
 $\log_1(X^2 - 2X + 1) =$   
 $-0.08675506435$

Như vậy đáp án đúng là đáp án A.

## 2. Kỹ năng Solve - Dò nghiệm của mọi phương trình 1 ẩn

Ví dụ 1 [Solve nghiệm đẹp]: Phương trình  $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  khi đó tích  $x_1 \cdot x_2$  bằng:

A. 16.

B. 36.

C. 22.

D. 32.

Hướng dẫn

Các em nhập phương trình vào máy

$\boxed{\log_2} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{x^2} \boxed{=} \boxed{5} \boxed{\log_2} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{=}$   
 $\log_2(X)^2 - 5\log_2(X) + 4 = 0$

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$   
 $\log_2(X)^2 - 5\log_2(X) + 4 = 0$   
 $X = 2$   
 $L-R = 0$

Sau khi tìm được nghiệm đầu tiên các em xét tiếp (PT):  $(X - A)$  với A là nghiệm

$\boxed{\leftarrow} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{)} \boxed{\leftarrow} \boxed{\leftarrow} \boxed{\div} \boxed{)} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{=}$   
 $(\log_2(X) + 4) \div (X - 2) =$

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$   
 $\log_2(X)^2 - 5\log_2(X) + 4 = 0$   
 $X = 16$   
 $L-R = 0$

Như vậy dễ dàng suy ra  $x_1 x_2 = 32 \rightarrow D$

**Ví dụ 2 [Solve nghiệm xấu]:** Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - (\sqrt{3} + 1) \log_3 x + \sqrt{3} = 0$ . Khi đó tích  $x_1, x_2$  bằng

- A.  $3^{\sqrt{3}+1}$ .      B.  $3^{-\sqrt{3}}$ .      C. 3.      D.  $3^{\sqrt{3}}$ .

### Hướng dẫn

Các em làm tương tự như ví dụ trên :

$\left( \log_{\frac{1}{3}}(X) \right)^2 - (\sqrt{3} + 1) \log_3(X) + \sqrt{3}$

$X = 6.704991854$   
 $L-R = 0$

Ở đây thay vì được nghiệm đẹp như ví dụ trên thì lại được một nghiệm lẻ để tìm tiếp được nghiệm thứ 2 các em làm như sau :

+ Lưu lại phương trình :  $\leftarrow \equiv$

$\left( \log_{\frac{1}{3}}(X) \right)^2 - (\sqrt{3} + 1) \log_3(X) + \sqrt{3}$

+Sau đó lưu liệu xấu vào A :  $\text{RCL} \rightarrow \text{SHIFT} \text{RCL} \rightarrow (-)$

$\text{Ans} \rightarrow A$

$6.704991854$

+Đẩy lên để tìm lại phương trình :  $\uparrow \uparrow$  đẩy sang để sửa  $\leftarrow$

$\left( \log_{\frac{1}{3}}(X) \right)^2 - (\sqrt{3} + 1) \log_3(X) + \sqrt{3}$

$$(X^3 + \sqrt{3}) \div (X - A)$$

$$X = 3$$

$$L-R = 0$$

Vậy được 2 nghiệm

$$3A - 3\sqrt{3} + 1 = 0$$

Ví dụ 3: Phương trình  $x^3 - \sqrt{1-x^2} = 0$  có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt

- A. 6.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

Hướng dẫn: Tương tự các em áp dụng Solve

$$X^3 - \sqrt{1-X^2} = 0$$

$$X = 0.8260313577$$

$$L-R = 0$$

Can't Solve

[AC] : Cancel

[←][→] : Goto

Máy hiện Can't Solve là hết nghiệm, vậy khoanh đáp án B.

### 3. Kỹ năng Table : Super Calc: tính nhiều giá trị biểu thức của hàm 1 biến

Ứng dụng chính là tìm Max-Min, phát hiện cực trị, tìm số nguyên để biểu thức nguyên ứng dụng tích phân 2,3 ẩn....

Table : Tính giá trị của biểu thức hàm 1 biến được 30 giá trị khi chỉ sử dụng một hàm  $f(x)$

$$\text{SHIFT} \text{ MODE } \text{ (v)} \text{ 5 } \text{ 1}$$

M Math  
f(X)=

Và tính được 20 giá trị nếu dùng cả  $f(x), g(x)$

SHIFT MODE 5 2

M Math M Math  
f(X)= g(X)=

Khuyến cáo : Nên chỉ dùng 1 chế độ  $f(x)$  tính cho nhanh và nhiều

**Ví dụ 1 [Table Max-Min]:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

A.  $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ . B.  $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ . C.  $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ . D.  $\max_R f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Hướng dẫn:**

Đầu tiên các em tìm tập xác định thì  $x \in [-1;1]$  nên các em sẽ làm như sau:

Vào Table : MODE 7

Nhập hàm : Mặc định biến là X nhé

ALPHA ) √ 1 - ALPHA ) x² =

M Math  
f(X)=X√1-X²

Start 1 =

End 1 =

Step . 1 =

M Math  
Start?

M Math  
End?

M Math  
Step?

-1

1

0.1

Start , End là điểm khởi đầu và kết thúc thường là 2 đầu mút của đoạn hay khoảng mà hàm xác định trên đó, Step là khoảng cách giữa các giá trị biến gần nhau nhất, step càng nhỏ thì càng chính xác.

Thông thường các em chọn step là 0.1, 0.125, 0.25, 0.5, 1 tùy vào khoảng to hay nhỏ miễn làm sao nó tính được số giá trị hàm lớn nhất.

\*Nếu hàm số có tập xác định là R :

+Đa thức các em để **Start -9= End 9= Step 1=** Muốn khảo sát kĩ thì **Start -4= End 4= Step 0.5**

+ Hàm lượng giác không nói gì đến khoảng các em để **Start  $-\pi$  = End  $\pi$  = Step  $\frac{\pi}{12}$  =**

Sau đó ta được kết quả

x	f(x)
-1	-0.9
-0.9	-0.8
-0.8	-0.392
-0.7	-0.48

Chúng ta được giá trị max xấp xỉ 0.5 tại  $x = 0.7 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$  do đó khoanh đáp án B

Ví dụ 2[MH lần 2] [Table Cực Trị]: Cho hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3.      B. Cực tiểu của hàm số bằng 1.  
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6.      D. Cực tiểu của hàm số bằng 2.

### Hướng dẫn

Các em vào Table : **MODE** **7**

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

Sau đó bấm = máy sẽ hỏi **Start** nhập -4= hỏi **End** nhập 4= **Step** 0.5=

Start?      End?      Step?

-4      4      0.5

Sau đó đẩy con trỏ và quan sát

$$\begin{array}{c|c|c} \text{M} & \text{X} & \text{F(X)} \\ \hline -3.5 & -6.1 & \\ -2.5 & -6.166 & \end{array}$$

-6

$$\begin{array}{c|c|c} \text{M} & \text{X} & \text{F(X)} \\ \hline 10 & 2.1666 & \\ 11 & 2.1 & \\ 12 & 2.1 & \end{array}$$

2

Hàm đạt cực đại tại  $x = -3$  cực tiểu tại  $x = 1$  khi đó giá trị cực tiểu là  $x = 2$  vậy khoanh D

Ví dụ 3: [MH lần 3][Table Dò Tìm] Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ.

Tính  $S = a^3 + b^3$ .

A.  $S = 2$ .B.  $S = -2$ .C.  $S = 0$ .D.  $S = 1$ .

Hướng dẫn:

Ở đây đầu tiên các em tính tích phân lưu vào A :

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx \rightarrow A$$

0.379885493

Tư duy ở đây là  $A = a + b \ln \frac{1+e}{2} \rightarrow b = \frac{A-a}{\ln \frac{1+e}{2}}$  cho a thay đổi để tìm b nguyên ta sẽ sử dụng

Table nhưng khi vào Table thì a là biến nên phải đổi thành X.

Table: Start -4=, End 4=, Step 0.5=

$$f(X) = \frac{A-X}{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{M} & \text{X} & \text{F(X)} \\ \hline 10 & -0.193 & \\ 11 & -1.806 & \\ 12 & -1.806 & \end{array}$$

- 1

Vậy  $a = 1, b = -1 \rightarrow S = 0 \rightarrow C$

Ví dụ 4: [MH lần 3][Table Số Nghiệm] Hỏi phương trình  $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$  có bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn

Thay vì tìm chính xác nghiệm thì chúng ta xem giá trị của hàm đổi dấu bao nhiêu lần là có bấy nhiêu nghiệm đơn, cứ đổi dấu từ âm sang dương hay dương sang âm là có 1 nghiệm dựa vào số lần đổi dấu ấy mà suy ra số nghiệm

Lưu ý bài này sẽ nhiều em nhập sai Đề cho  $\ln(x+1)^3$  các em phải nhập vào máy là  $\ln((x+1)^3)$  hoặc  $3\ln(x+1)$  nếu các em nhập  $\ln(x+1)^3$  nó sẽ hiểu là  $[\ln(x+1)]^3$  nên các em cần lưu ý chỗ này.

Dùng Table : Start -0.99 = End 9 = Step 0.5 =

MODE 7 3 ALPHA )  $x^2$  = 6 ALPHA ) + ln ( ALPHA ) + 1 ) SHIFT  $x^2$  ) + 1 =

$f(X) = 3X^2 - 6X + \ln((X+1)^3) + 1$

M	X	F(X)	Math
1	-0.99	-3.935	
2	-0.49	-0.406	
3	0.01	0.9701	2.64026634

M	X	F(X)	Math
3	0.01	0.9701	
4	0.51	0.406	
5	1.01	0.9947	-0.04337104752

Ở đây giá trị hàm đổi dấu 3 lần nên phương trình đã cho có 3 nghiệm

Như vậy ta đã từng bước nghiên cứu cơ bản các tính năng chính sẽ dùng, để tìm hiểu sâu hơn trong từng dạng cụ thể ta sẽ đi theo Casio theo chuyên đề.

### III. Bí Kíp Casio theo chuyên đề

#### \*Hàm Số

##### 1.Sự Biến Thiên

Ví dụ 1: Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ . B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ . D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

#### Hướng dẫn



**Cách 1:** Các em sử dụng tính năng  $d/dx$  là tính năng tính đạo hàm của hàm 1 biến tại 1 điểm để loại nhanh các đáp án sai

Các em nhập vào máy

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 1) \Big|_{x=0} = 2x^2 + x + 1 \Big|_{x=0} = 1$$

Do đó loại C, Khoanh A, để chắc chắn hơn các em tính đạo hàm tại  $x=10$  đặc trưng cho đáp án D,  $x=-10$  đặc trưng cho đáp án A

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 1) \Big|_{x=10} = 201$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 1) \Big|_{x=-10} = 341$$

Vậy loại cả B và D

**Cách 2:** Dùng Table để xét : Start  $\frac{1}{3}$  End 1 Step 0.1=

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

X	F(X)
1	0.3333
2	0.4333
3	0.5333

$$0.5828148148$$


Các em thấy nó giảm đều do đó hàm nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$  do đó đáp án A đúng

**Ví dụ 2:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + mx^2 - x + m$  nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .


A.  $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$ .      B.  $(-\infty; -1)$ .      C.  $[-1; +\infty)$ .      D.  $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right]$ .

**Hướng dẫn**


**\*Dùng Table:** Chọn giá trị  $m = -10$  đặc trưng cho A,B,D với Start 1= End 2= Step 0.1=

$$f(X) = X^3 + (-10)X^2 \quad f(X) = -X + (-10)$$


Thấy hàm giảm đều nên chỉ có thể A,B,D đúng tiếp tục xem sự khác biệt giữa các đáp án thì B chứa  $m = -1.1$  mà A,D không chứa (xét đáp án rộng hơn trước)

$$f(X) = -X + (-1.1) \quad f(X) = -X + (-1.1)$$


Thấy nó tăng dần do đó loại B chỉ còn A,D thì mình xét  $m = -\frac{11}{4}$  D có A thì không

$$f(X) = X^3 + \left(-\frac{11}{4}\right)X^2 \quad f(X) = -X + \left(-\frac{11}{4}\right)$$


\*Dùng  $d/dx$ : tính năng tính đạo hàm tại 1 điểm của hàm 1 biến.

SHIFT  $\int$  ALPHA  $\square$  SHIFT  $x^2$  + ALPHA S+D ALPHA  $\square$   $x^2$  - ALPHA  $\square$  + ALPHA S+D  $\blacktriangleright$  1  $\cdot$  1

$$\left. \frac{d}{dx} (X^3 + YX^2 - X + Y) \right|_{x=1.1}$$

Ta sẽ xét các giá trị đặc trưng của các đáp án : Đáp án C tính tại  $X=10$

CALC  $\equiv$  1 0  $\equiv$

$$\left. \frac{d}{dx} (X^3 + YX^2 - X + Y) \right|_{x=10}$$

4783  
100

Ta sẽ loại được C và xét tiếp sự khác biệt A,B,D

CALC  $\equiv$  - 1 0  $\equiv$       CALC  $\equiv$  - 0  $\cdot$  9  $\equiv$       CALC  $\equiv$  - 1 1  $\div$  4  $\equiv$

$$\frac{d}{dx}(X^3 + YX^2 - X + Y) \Big|_{x=-\frac{1937}{100}} \quad \frac{d}{dx}(X^3 + YX^2 - X + Y) \Big|_{x=\frac{13}{20}} \quad \frac{d}{dx}(X^3 + YX^2 - X + Y) \Big|_{x=-\frac{171}{50}}$$

Vậy khoanh đáp án D.

## 2. Cực Trị

Ví dụ 1: Số điểm cực trị của hàm số  $y = |x|^3 - |x|^2 - 1$

A.0

B.3

C.2

D.4

Hướng dẫn

Các em nhập hàm vào Table :

**MODE** **7** **SHIFT** **hyp** **ALPHA** **)** **▶** **SHIFT** **x<sup>2</sup>** **=** **SHIFT** **hyp** **ALPHA** **)** **▶** **x<sup>2</sup>** **=** **1** **=**

$$f(X) = |X|^3 - |X|^2 - 1$$

Start -4= End 4= Step 0.5=

**=** **4** **=** **4** **=** **0** **.** **5** **=**

M	X	F(X)	M	X	F(X)	M	X	F(X)
6	-1.5	-0.125	8	-0.5	-0.125	10	0.5	-0.125
7	-1	-1	9	0	-1	11	1	-1
8	-0.5	-1.125	10	0.5	-1.125	12	1.5	0.125

-1

-1

-1

Các em thấy nó có 3 cực trị, cứ đi lên tới đỉnh rồi xuống là cực đại, đi xuống dưới đáy rồi đi lên thì là cực tiểu nó như 1 đồ thị thu nhỏ mà nhìn vào đó em sẽ biết được max-min, cực trị, sự biến thiên, tương giao,....

Ví dụ 2: Cho hàm số  $f(x) = x + m + \frac{n}{x+1}$  (với  $m, n$  là các tham số thực). Tìm  $m, n$  để hàm số đạt cực đại tại  $x = -2$  và  $f(-2) = -2$ .

A. Không tồn tại giá trị của  $m, n$ .

B.  $m = -1; n = 1$ .

C.  $m = n = 1$ .

D.  $m = n = -2$ .

Hướng dẫn

Các em thay từng giá trị  $m, n$  vào hàm rồi dùng Table : **MODE** **7**

Đáp án B:

$f(X) = X - 1 + \frac{1}{X+1}$

$\begin{array}{c|c|c} X & F(X) & \\ \hline -2.5 & -4.166 & \\ -2 & -4 & \\ -1.5 & -4.5 & \end{array}$

-4

Đáp án C: Sửa rồi các em ấn  $\equiv \equiv \equiv \equiv$

$f(X) = X + 1 + \frac{1}{X+1}$

$\begin{array}{c|c|c} X & F(X) & \\ \hline -2.5 & -2.166 & \\ -2 & -2 & \\ -1.5 & -2.5 & \end{array}$

-2

Thấy nó thỏa mãn đúng yêu cầu là cực đại luôn vậy đáp án đúng là C

### 3.Max-Min

**Ví dụ 1:** Cho hàm số  $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng:

A. -1.

B. 3.

C. 1.

D. 7.

#### Hướng dẫn

Chú ý để chế độ góc ở Radian:  $\text{SHIFT} \text{MODE} 4$

Vào Mode 7: Start  $-\frac{\pi}{2}$  End  $\frac{\pi}{2}$  và Step là  $\frac{\pi}{12}$  (đây là bước nhảy mặc định cho lượng giác.)

$f(X) = 3\sin(X) - 4\sin^3 X$

$\begin{array}{c|c|c} X & F(X) & \\ \hline 0 & 0.2617 & 0.7071 \\ 1 & 0.5235 & 0.7071 \\ 2 & 0.7853 & 0.7071 \end{array}$

1

Vậy khoanh đáp án C

### 4.Tiếp Cận

**Ví dụ 1:** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị  $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x}$  là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

#### Hướng dẫn

Nhập biểu thức như đề bài :

$$\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$$

**\*Tìm tiệm cận đứng :** Thường là nghiệm của mẫu nên ta sẽ tính giới hạn bằng cách lấy giá trị xấp xỉ nghiệm đó

Ví dụ  $x=1 \rightarrow \text{CALC}$   $X=1.0000001$

$$\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 67320516.39$$

$$\text{Math ERROR}$$

[AC] : Cancel  
[←][→] : Goto

Vậy chỉ có một tiệm cận đứng là  $x=1$

**\*Tiệm cận ngang:** Ta sẽ tính giới hạn tại  $10^6(+\infty)$  và  $-10^6(-\infty)$

$$\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 3.000005$$

$$\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 2.999999$$

Vậy là có thêm một đường tiệm cận ngang  $y=3$

## 5. Tương Giao

Lí thuyết chung là khi giá trị hàm đổi dấu âm sang dương hay dương sang âm lúc này hàm sẽ phải đi qua số 0 tức là có 1 nghiệm lẻ, qua nghiệm chẵn thì dấu của hàm không đổi

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực m để phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn  $[0;1]$  :  $x^3+x^2+x=m(x^2+1)^2$

A.  $m \geq 1$       B.  $m \leq 1$       C.  $0 \leq m \leq 1$       D.  $0 \leq m \leq \frac{3}{4}$

Hướng dẫn :

\*Cách 1: Cô lập được m thì dùng cách này nhanh hơn

$$x^3 + x^2 + x = m(x^2 + 1)^2 \rightarrow m = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} = f(x) \rightarrow \min_{f(x)} \leq m \leq \max_{f(x)}$$

Table : Start 0= End 1= Step 0.1 =

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$ 

x	f(x)
0	0
0.1	0.1088
0.2	0.2292
0.3	0.34

\*Cách 2: thử từng giá trị đặc trưng các đáp án và quan sát đổi dấu

Đáp án A :  $m=10$  không thấy sự đổi dấu

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$ 

x	f(x)
0	-10
0.1	-10.09
0.2	-10.56

Đáp án B :  $m=-10$  không thấy sự đổi dấu

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$ 

x	f(x)
0	12.298
0.1	14.08
0.2	16.5

Đáp án C :  $m=1$  không thấy sự đổi dấu

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$ 

x	f(x)
0	-0.909
0.1	-0.833
0.2	-0.7711

Vậy khoảng đáp án D, các em thử  $m=0.5$  mà xem

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$ 

x	f(x)
0	-0.177
0.1	-0.048
0.2	0.09375

\*Mũ - Logarit



Tương tự xét B,C,D

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx}(\ln(e^{2x}+1))|_{x=1} & \frac{d}{dx}(\ln(e^{2x}+1))|_{x=2} & \frac{d}{dx}(\ln(e^{2x}+1))|_{x=3} \\ 1.999909196 & 9.079161541 \times 10^5 & 1.499999997 \end{array}$$

Vậy khoanh đáp án C

**Ví dụ 2:** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = 2^{x^3-x^2+mx}$  đồng biến trên  $[1,2]$ .

- A.  $m > \frac{1}{3}$ .      B.  $m \geq \frac{1}{3}$ .      C.  $m \geq -1$ .      D.  $m > -8$ .

**Hướng dẫn**

Làm tương tự như phần sự biến thiên

$$\begin{array}{ccc} \text{[CALC]} \text{[=]} \text{[-]} \text{[7]} \text{[=]} & \text{[CALC]} \text{[=]} \text{[-]} \text{[1]} \text{[=]} & \text{[CALC]} \text{[=]} \text{[1]} \text{[÷]} \text{[3]} \text{[=]} \\ \frac{d}{dx}(2^{x^3-x^2+7x})|_{x=1} & \frac{d}{dx}(2^{x^3-x^2+7x})|_{x=2} & \frac{d}{dx}(2^{x^3-x^2+7x})|_{x=3} \\ -0.02019176667 & 0.1512117539 & 1.713808028 \end{array}$$

Vậy khoanh đáp án C

**Ví dụ 3:** Cho hàm số  $y = e^{3x} \cdot \sin 5x$  Tìm  $m$  để  $6y' - y'' + my = 0$

- A.  $m = -30$     B.  $m = -34$     C.  $m = 30$     D.  $m = 34$

**Hướng dẫn**

Do biểu thức  $6y' - y'' + my = 0$  đúng với mọi  $x$  nên các em chọn đơn giản  $x = 0.1$

Bước 1 : Tính đạo hàm cấp 2 tại  $x = 0.1$

$$y'' = \frac{f'(x+0.001) - f'(x)}{0.001} \quad \text{các em sử dụng tính năng tính đạo hàm cấp 1 của máy}$$

$$\text{Các em tính } f'(0.1) \rightarrow A \quad f'(0.1+0.001) \rightarrow B \quad \text{rồi } y''(0.1) = \frac{B-A}{0.001}$$

$$\text{[SHIFT]} \text{[f']} \text{[SHIFT]} \text{[ln]} \text{[3]} \text{[ALPHA]} \text{[)]} \text{[>]} \text{[sin]} \text{[5]} \text{[ALPHA]} \text{[)]} \text{[)]} \text{[>]} \text{[0]} \text{[.] } \text{[1]} \text{[SHIFT]} \text{[RCL]} \text{[(-)}$$



$$\frac{d}{dx}(e^{3x} \sin(5x))|_x$$

7.86453311

$$\frac{d}{dx}(e^{3x} \sin(5x))|_x$$

7.889658574

$$\frac{B-A}{0.001} \rightarrow C$$

25.12546326

Bước 2: Tính m :  $6y' - y'' + my = 0 \rightarrow m = \frac{6y' - y''}{-y}$

$$\frac{6A-C}{-e^{3 \times 0.1} \sin(5 \times 0.1)}$$

-34.09024812

Vậy mình khoanh đáp án B

### 3. Max-Min

**Ví dụ 1:** Cho  $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$  với  $a > 1, b > 1$  và  $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$ . Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất

A.  $m=1$       B.  $m=\frac{1}{2}$       C.  $m=4$       D.  $m=2$

**Hướng dẫn:**

Có  $a > 1 \rightarrow a = 1.1$  các em tự chọn rồi cho  $b = X : 1.01 \rightarrow 2$  chạy trong Table

$$f(X) = \log_{1.1}(X)^2 \quad f(X) = \log_X(1.1)$$

Start 1.01= End 2= Step 0.1=

12

Các em thấy nó đạt giá trị nhỏ nhất tại  $b=1.21$  với  $a=1.1$

Vậy khoanh đáp án A

#### 4. Tính toán, biểu diễn, rút gọn

Ví dụ 1: Cho  $a, b$  là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn  $\log_a b = 3$ . Tính giá trị của biểu

thức  $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ .

A.  $T = 1$ .

B.  $T = 4$ .

C.  $T = -\frac{3}{4}$ .

D.  $T = -4$ .

Hướng dẫn

Các em chọn  $a=2 \rightarrow b=a^{\sqrt{3}}$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức  $P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left( \frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt{b}} b^{-2}$  (với  $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$ ).

A.  $P = 2$ .

B.  $P = 1$ .

C.  $P = \sqrt{3}$ .

D.  $P = \sqrt{2}$ .

Hướng dẫn

Về bản chất nó chỉ là bài toán rút gọn tuy nhiên kết quả không phụ thuộc  $a, b$  nên các em chọn  $a, b$  thỏa mãn điều kiện là được.

## 5. Phương Trình – Bất Phương Trình

**Ví dụ 1:** Biết phương trình  $9^x - 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x+3}{2}} - 3^{2x-1}$  có nghiệm là  $a$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a + \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$ .

A.  $P = \frac{1}{2}$ .

B.  $P = 1 - \log_{\frac{9}{2}} 2$ .

C.  $P = 1$ .

D.  $P = 1 - \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$ .

### Hướng dẫn

Các em nhập phương trình vào máy

$9^x - 2^{x+0.5} - (2^{x+1})$

SHIFT CALC

$9^x - 2^{x+0.5} - (2^{x+1})$   
 $X = 0.7695772897$   
 $L-R = 0$

**Ví dụ 2:** Tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$ .

A.  $S = (2; +\infty)$ .

B.  $S = (-\infty; 0)$ .

C.  $S = (0; +\infty)$ .

D.  $S = (-\infty; +\infty)$ .

### Hướng dẫn

Cứ gặp BPT là các em nhập nguyên lại rồi CALC từng giá trị đặc trưng của đáp án thôi

$2^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$

CALC 1 0

CALC - 1 0

CALC 0 1

$2^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$   
 $511.2421417$

$2^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$   
 $-1.31901963$

$2^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$   
 $0.5358867313$

Vậy khoanh đáp án C.

\*Nguyễn Hàm - Tích Phân

1. Nguyễn Hàm

**Ví dụ 2:** Tìm giá trị của  $m$  để hàm số  $F(x) = m^2x^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ .

A.  $m = 2$ .

B.  $m = \pm 1$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = 1$ .

**Hướng dẫn:**

Các em xét đạo hàm  $F(x)$  tại 10 rồi trừ đi  $f(10)$  CALC xem giá trị  $m$  nào cho KQ bằng 0

$$\frac{d}{dx}(Y^2X^3 + (3Y+2)X^2) - (3X^2 + 10X - 4)$$

$$\text{CALC } 2 \text{ } \Rightarrow \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } \Rightarrow$$

$$\text{CALC } - \text{ } 1 \text{ } \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\text{CALC } 1 \text{ } \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(Y^2X^3 + (3Y+2)X^2) = 960$$

$$\frac{d}{dx}(Y^2X^3 + (3Y+2)X^2) = -120$$

$$\frac{d}{dx}(Y^2X^3 + (3Y+2)X^2) = 0$$

Vậy khoanh đáp án D

**Câu 21:** Biết  $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của biểu thức

$a+b$ .

A.  $a+b=1$ .

B.  $a+b=5$ .

C.  $a+b=-1$ .

D.  $a+b=-5$ .

**Hướng dẫn:**

Các em thay cận 4 và 5 (chọn khoảng cận không chứa giá trị làm cho hàm không xác định)

$$\text{rồi tính lưu vào A thay số giải hệ: } \begin{cases} a \ln \frac{4}{3} + b \ln \frac{3}{2} = A \\ a+b = \{A, B, C, D\} \end{cases}$$

$$\int_4^5 \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = -0.6410311794$$

$$X =$$

$$Y =$$

$$2$$

$$-3$$

Vậy khoanh C.

2. Tích Phân

**Ví dụ 1.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A.  $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du.$

B.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du.$

C.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du.$

D.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du.$

**Hướng dẫn**

Tính tích phân rồi so với giá trị ở các đáp án

$$\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx = 3.464101615 \quad \int_0^3 \sqrt{x} dx = 3.464101615$$

**Ví dụ 2:** Biết  $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$  trong đó  $a, b$  nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

Hãy tính  $ab$

A.  $ab = -5$

B.  $ab = \frac{5}{4}$

C.  $ab = 12$

D.  $ab = 6$

**Hướng dẫn:**

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = A = \frac{1}{3} \left( A + \frac{5}{6} \right) \quad 4 \times 3 = \frac{4}{3} \quad 12$$

**Ví dụ 3:** Giả sử  $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$ . Tính giá trị biểu thức  $S = -2a + b + 3c^2$ .

A.  $S = -2$ .

B.  $S = 3$ .

C.  $S = 0$ .

D.  $S = 6$ .

**Hướng dẫn:**

$$\int_3^5 \frac{1}{x^2-x} dx = A = 0.1823215568$$

$$A = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2 \rightarrow e^A = 5^a \cdot 3^b \cdot 2^c$$

$$e^A$$

$$\frac{6}{5}$$

$$5^a \cdot 3^b \cdot 2^c = \frac{6}{5} = 2 \cdot 3 \cdot 5^{-1} \rightarrow a = -1, b = c = 1 \text{ Vậy khoanh D}$$

**\*Số Phức**

**1. Tính Toán Cơ Bản**

**Dạng 1: Cộng trừ nhân chia số phức :** **MODE** **2**

$$\boxed{1} \boxed{+} \boxed{\text{ENG}} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \\ \text{M} \quad \text{CMPLX} \quad \text{Math} \\ 1+i-(3+2i)$$

$$\boxed{)} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{=} \\ \text{M} \quad \text{CMPLX} \quad \text{Math} \quad \blacktriangle \\ (1+i)(3-i) \\ 4+2i$$

**Dạng 2: Module**

**Ví dụ 1:** Tìm môđun của số phức  $z$  thỏa mãn  $(1-2i)\bar{z}+2i=-6$ .

A.  $|z|=\sqrt{2}$ .      B.  $|z|=2\sqrt{2}$ .      C.  $|z|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $|z|=3\sqrt{2}$ .

**Hướng dẫn**

$$(1-2i)\bar{z}+2i=-6 \rightarrow |z|=|\bar{z}|=\left|\frac{-6-2i}{1-2i}\right|$$

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{\frac{\square}{\square}} \boxed{-} \boxed{6} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{\blacktriangledown} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{=} \\ \text{M} \quad \text{CMPLX} \quad \text{Math} \quad \blacktriangle \\ \left| \frac{-6-2i}{1-2i} \right| \\ 2\sqrt{2}$$

**2. Phương trình phức cơ bản**

**\*Phương Trình bậc nhất**

**Ví dụ 1:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)=1-i$ . Tính môđun của số phức

$$w = \frac{i-z}{1+z}$$

A.  $\frac{\sqrt{82}}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{82}}{8}$

C.  $\frac{2\sqrt{82}}{9}$

D.  $\frac{3\sqrt{82}}{5}$

### Hướng dẫn

Đây là dạng phương trình bậc nhất của số phức các em nhập y lại phương trình :

$$(3-i)(X+1)+(2-i) \quad \leftarrow \text{Conjg}(X)+3i \quad - \quad ( \quad \leftarrow 9(X)+3i)-(1-i)$$

CALC 1 0 0 0 0 + 1 0 0 ENG =

(3-i)(X+1)+(2-i)

50005-19894i

Chúng ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 50005 = 50.000 + 5 = 5a + 5 \\ 19894 = 20.000 - 100 - 6 = 2a - b - 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a + 5 = 0 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -8 \rightarrow z = -1 - 8i$$

$$\left| \frac{i - (-1 - 8i)}{1 + (-1 - 8i)} \right| = \frac{\sqrt{82}}{8}$$

Vậy khoanh đáp án B

### \*Phương Trình bậc 2 hệ số thực

Ví dụ 1: Gọi  $z_1, z_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $z^2 + z + 1 = 0$ . Tính giá trị  $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$ .

A.  $P = 1$ .

B.  $P = -1$ .

C.  $P = 0$ .

D.  $P = 2$ .

### Hướng dẫn

Các em tính nghiệm rồi lưu vào X,Y

MODE 5 3 1 = 1 = 1 =

$X_1 =$

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

SHIFT RCL )



M

X2=

Math Math

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

SHIFT RCL (S/D)

Sau đó vào CMPLX : MODE 2

M

X17+Y17

Math Math

$$-1$$

Thay vì tính mũ 2017 các em tính mũ 17 vì nó có cùng quy luật, do đó khoanh B.

### \*Phương trình bậc 2 hệ số phức

**Câu 11:** Trên tập số phức, gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm của phương trình  $z^2 + 2z + 4i - 2 = 0$  Tính giá trị

biểu thức  $P = \frac{|z_1| + |z_2|}{4 + |z_1| \cdot |z_2|}$

A.  $\frac{-\sqrt{10} + 2\sqrt{2}}{2}$

B.  $\frac{-\sqrt{10} + 3\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{10} + 3\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{-\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}{2}$

**Hướng dẫn:**

Tính  $\Delta'$  rồi tính ra nghiệm :  $z_1 = 1 - i; z_2 = -3 + i$

Dùng nhanh biểu thức sau để tính căn :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|} \angle \frac{\arg(\Delta)}{2}$  rồi áp dụng công thức nghiệm phương trình bậc 2

1-(4i-2)+A

Math

$$3-4i$$

$\sqrt{|\Delta|} \angle \frac{\arg(\Delta)}{2}$

Math

$$2-i$$

$\frac{1-1+1+1-1+1}{4+|1-i||-3+i|} = \frac{-\sqrt{10}+3\sqrt{2}}{2}$

Vậy khoanh đáp án B



**\*Phương trình bậc 3 hệ số thực**

**Ví dụ 1:** Kí hiệu  $z_1; z_2; z_3$  là ba nghiệm của phương trình phức  $z^3 + 2z^2 + z - 4 = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ .

A.  $T = 4$ .

B.  $T = 4 + \sqrt{5}$ .

C.  $T = 4\sqrt{5}$ .

D.  $T = 5$ .

**Hướng dẫn**

Các em vào giải phương trình bậc 3

$$\begin{array}{l} X_1 = \quad \text{Math} \quad X_2 = \quad \text{Math} \quad X_3 = \quad \text{Math} \\ 1 \quad -\frac{3}{2} + 1.322875656i \quad -\frac{3}{2} - 1.322875656i \end{array}$$

Để lưu nghiệm  $X_2$  vào X các em bấm  $\text{SHIFT}$   $\text{RCL}$   $\text{X}$  hiện như thế này là được

Stored to X

Sau đó lưu nghiệm  $X_3$  vào Y sau đó phải vào hệ CMPLX không được sang hệ COMPL không là mất phần ảo

$$\begin{array}{l} \text{MODE} \quad 2 \\ \text{CMPLX} \quad \text{Math} \\ |1| + |X| + |Y| \\ 5 \end{array}$$

**3. Một số dạng khác**

**Ví dụ 1: [Chuyên Biên Hòa – Hà Nam]** Cho ba số phức  $z_1, z_2, z_3$  thỏa mãn điều kiện

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  và  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . Tính  $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

A. 1

B. 0

C. -1

D.  $1+i$

**Hướng dẫn**

Chọn :  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1$

Bấm máy ta được:

$$\left(0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

**Ví dụ 2:** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=5$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của các số phức  $w=(3+4i)z-3i$  là một đường tròn. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đó.

- A.  $r=\sqrt{5}$ .      B.  $r=5$ .      C.  $r=\sqrt{10}$ .      D.  $r=25$ .

**Hướng dẫn:**

Các em biến đổi đơn giản như sau:  $w=(3+4i)z-3i \Leftrightarrow w+3i=(3+4i)z$  lấy module 2 vế ta được:  $|w+3i|=|3+4i||z|=25$  vậy tập hợp biểu diễn  $w$  là đường tròn tâm  $(0;-3)$  và bán kính là 25

**Ví dụ 3:** Nếu số phức  $z \neq 3$  thỏa mãn  $|z|=3$  thì phần thực của  $\frac{1}{3-z}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{6}$       C. 6      D. 3

**Hướng dẫn**

Ở đây bài toán đúng với mọi số  $z \neq 3$  thỏa mãn  $|z|=3$  nên các em chỉ cần chọn một số  $z$  bất kì thỏa mãn là được chúng ta chọn là  $3i$

$$\frac{1}{3-3i} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$$

Vậy khoanh đáp án B

\*Các dạng toán cơ bản Oxyz

+Cách bấm máy casio oxyz cơ bản em xem ở thư mục cùng tài liệu này.

Các dạng cơ bản phải nắm được:

**Dạng 1:** Giao giữa đường với mặt

**Ví dụ 1:** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A(0; 1; 2)$  trên mặt phẳng  $(P): x + y + z = 0$ .

- A.  $(-1; 0; 1)$ .      B.  $(-2; 0; 2)$ .      C.  $(-1; 1; 0)$ .      D.  $(-2; 2; 0)$ .

### Hướng dẫn

**Cách 1:** Kiểm tra các đáp án:

Ta có:  $M(-1; 0; 1) \in (P)$ .  $(P)$  có một vectơ pháp tuyến  $\vec{n}(1; 1; 1)$

$\overrightarrow{AM}(-1; -1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{n} \Rightarrow AM \perp (P)$ . Do đó  $M(-1; 0; 1)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $(P)$ .

**Cách 2:** Phương pháp tự luận:

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $(P)$ . Ta có  $(\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(P)$  là  $M(-1; 0; 1)$ . Do đó  $M(-1; 0; 1)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $(P)$ .

**Ví dụ 2[MH 3].** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$  và điểm  $A(-1; 3; 6)$ . Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $(P)$ , tính  $OA'$ .

- A.  $OA' = 3\sqrt{26}$ .      B.  $OA' = 5\sqrt{3}$ .      C.  $OA' = \sqrt{46}$ .      D.  $OA' = \sqrt{186}$ .

### Hướng dẫn

Tìm nhanh hình chiếu  $H$  của  $A$  lên  $(P)$  kết hợp tham số hóa và giải phương trình tìm tham số luôn:  $6(-1+6t) - 2(3-2t) + (6+t) - 35 = 0$

$\boxed{6} \boxed{(-)} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{(-)} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(-)} \boxed{6} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-}$   
 $\boxed{3} \boxed{5} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$   

$$6(-1+6X) - 2(3-2X) + 6 + X - 35 = 0$$

$H(5, 1, 7)$  là trung điểm của  $AA'$  nên  $A'(11, -1, 8) \rightarrow OA' = \sqrt{186}$

**Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng**

**Ví dụ 1:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q): 2x + y - z = 0$ .

- A.  $x + 2y + z = 0$ .      B.  $x - 2y - 1 = 0$ .      C.  $x + 2y - 1 = 0$ .      D.  $x - 2y + z = 0$ .

**Hướng dẫn :** Do  $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow [\overline{n_{(Q)}}, \overline{u_d}] = (4; -8; 0) = 4(1; -2; 0)$  là một VTPT của  $(P)$  nên chọn B

**Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng**

**Ví dụ 1[MH3].** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$ .

Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng  $x + 3 = 0$ ?

- A.  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

**Hướng dẫn**

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Các em tìm giao của  $d$  và  $x + 3 = 0$  thì điểm này cũng thuộc  $d'$  là hình chiếu của  $d$

$x + 3 = 0 \rightarrow (1 + 2t) + 3 = 0 \rightarrow t = -2 \rightarrow H(-3, -3, -5)$  em thay tọa độ điểm này vào các đáp án xem nó thuộc đáp án nào?

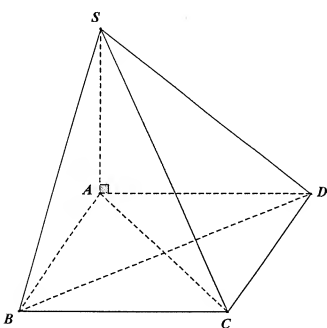
Duy nhất chỉ có đáp án D thỏa mãn  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t = -3 \rightarrow t = -3 \\ z = 7 + 4t = 7 + 4(-3) = -5 \end{cases}$

\*Các dạng toán cơ bản HHKG

### Dạng 1: Tính thể tích chóp biết đường cao và đáy

**Ví dụ 1:** Hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AB=a$ ,  $AD=a\sqrt{2}$ ;  $SA \perp (ABCD)$ , góc giữa  $SC$  và đáy bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

- A.  $3\sqrt{2}a^3$ . B.  $3a^3$ . C.  $\sqrt{6}a^3$ . D.  $\sqrt{2}a^3$ .



**Hướng dẫn**

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$$

$$\widehat{SCA} = (\widehat{SC, (ABCD)}) = 60^\circ$$

Vậy  $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3a$ . Ngoài ra

$$S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} \text{ nên } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}.$$

### Dạng 2: Tính thể tích các khối lăng trụ, hình trụ, nón, cầu

Phần này chủ yếu chúng ta nhớ các công thức tính cơ bản sách giáo khoa và làm thêm nhiều bài ở các đề thi thử là được

**Ví dụ 1[MH 3].** Tính thể tích  $V$  của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng  $a$ .

- A.  $V = \frac{\pi a^3}{4}$ . B.  $V = \pi a^3$ . C.  $V = \frac{\pi a^3}{6}$ . D.  $V = \frac{\pi a^3}{2}$ .

Hướng dẫn:

$$\text{Vẽ hình nhanh : } \begin{cases} h=a \\ r=\frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow V = \pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot a \rightarrow D$$

Về cơ bản thì anh đã hướng dẫn những dạng cơ bản nhất và chắc chắn có trong đề thi để các em ôn tập trọng tâm, File này anh đã cố gắng chất lọc biên soạn những thứ cần thiết nhất có thể và lược bớt những kĩ thuật quá nâng cao tập trung vào giải quyết các vấn đề trong đề thi.

Anh hi vọng các em rèn luyện cho tốt để tự tin đương đầu với cuộc thi sắp tới!

Chúc Các em Đỗ Đại Học!

## Sự biến thiên

### I. Lý Thuyết

Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$ . Khi đó

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } (a; b);$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow f \text{ nghịch biến trên } (a; b);$$

Ta thấy việc xét sự biến thiên của hàm số thực chất là xét dấu của đạo hàm.

### II. Ví Dụ Minh Họa

#### Dạng 1: Bài toán không chứa tham số

**Ví dụ 1:** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; 3)$       B.  $(-\infty; 3)$  và  $(3; +\infty)$       C.  $(-3; 3)$       D.  $\mathbb{R}$

#### Hướng dẫn:

Ta có :  $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$  do đó hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$



**Ví dụ 2:** Hàm số  $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 16x - 31$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; -4)$  và  $(2; +\infty)$       B.  $(-\infty; 2)$       C.  $(-4; 2)$       D. Đáp án khác

#### Hướng dẫn:

$$\text{Ta có : } y' = -2x^2 - 4x + 16, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \rightarrow y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$$

#### Giải nhanh bằng Casio: Sử dụng tính năng đạo hàm d/dx

**Bước 1:** Khởi động d/dx :  

**Bước 2:** Nhập biểu thức vào máy:

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 16x - 31 \right) \Big|_{x=}$$

**Bước 3:** Chọn giá trị  $x$  đại diện đặc trưng cho đáp án đó

Xét đáp án A với  $x = -100, x = 100$

$$4(16x-31)|_{x=-100} \quad \frac{d}{dx} \left( -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 16x \right) = -19584$$

$$4(16x-31)|_{x=100} \quad \frac{d}{dx} \left( -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 16x \right) = -20384$$

Vậy cả 2 khoảng  $(-\infty; -4)$  và  $(2; +\infty)$  đều thỏa mãn nên chọn A

**Ví dụ 3:** Hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$     B.  $(-\infty; -1)$  và  $(0; 1)$     C.  $(-1; +\infty)$     D.  $(-\infty; 1)$

**Hướng dẫn**

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1), y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow A$$

**Giải nhanh bằng Casio: Sử dụng tính năng CALC**

<b>Bước 1:</b> Nhập biểu thức cần tính : $4x^3 - 4x$	$4x^3 - 4x$
<b>Bước 2:</b> Gọi chương trình CALC : $\text{[CALC]}$	$x?$
<b>Bước 3:</b> Lấy giá trị đặc trưng của từng đáp án để thử Ví dụ lấy $x = 100$ để kiểm tra đáp án A, C $100 \text{ [ENTER]} =$ Vậy có khả năng A hoặc C đúng, tiếp tục tìm sự khác biệt giữa 2 đáp án này : Các em lấy $x = 0,5$ vì giá trị này chỉ có C có mà A không có $\text{[CALC]} 0,5 \text{ [ENTER]} =$	$4x^3 - 4x$ $3999600$ $4x^3 - 4x$ $-\frac{3}{2}$

Vậy loại ngay đáp án C nên chọn A.

**Ví dụ 4:** Hàm số  $y = \frac{3x+2}{x+1}$  nghịch biến trên khoảng nào?

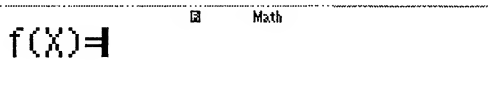
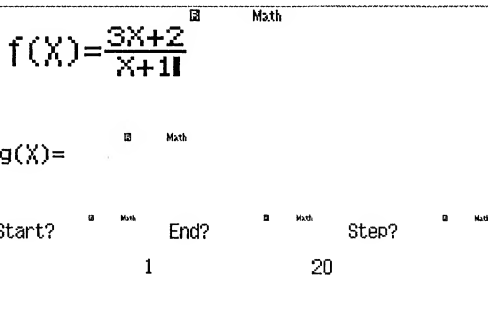
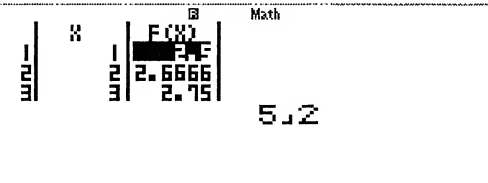
- A.  $x > 1$       B.  $x < 1$       C.  $R \setminus 1$       D. Cả A,B,C đều sai

Hướng dẫn:

Công thức tính nhanh:  $y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$\rightarrow y = \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow D$$

**Giải nhanh bằng Casio: Sử dụng tính năng TABLE**

<p><b>Bước 1:</b> Khởi động Table Program</p> <p><b>MODE</b> <b>7</b></p>	
<p><b>Bước 2:</b> Nhập hàm số cần khảo sát</p> <p><b>≡</b> <b>3</b> <b>ALPHA</b> <b>)</b> <b>+</b> <b>2</b> <b>▼</b> <b>ALPHA</b> <b>)</b> <b>+</b> <b>1</b></p> <p>Một số máy sẽ hiện thêm G(x) nếu chưa tắt sau khi bấm <b>≡</b></p> <p>Các em bấm <b>≡</b> để bỏ qua.</p> <p>Tiếp theo:</p> <p>Máy hiện Start: Giá trị khởi đầu</p> <p>Để kiểm tra đáp án A:</p> <p>Start 1= ; End 20= ; Step 1=</p>	
<p><b>Bước 3:</b> Theo dõi bảng giá trị</p> <p>Dựa vào bảng giá trị thấy F(x) tăng dần chứng tỏ hàm số đồng biến trên đoạn vừa rồi vậy đáp án A bị sai nên loại C và ta sẽ thử B tương tự.</p>	

Vậy, để giải nhanh bài toán Sự biến thiên chúng ta có 3 cách là dùng : **d/dx** , **CALC**, **Table** để giải quyết nhanh và không bị phụ thuộc nhiều vào kĩ năng biến đổi nhanh.



Để kiểm chứng tính hiệu quả của 3 thủ thuật casio này chúng ta sẽ sang một số ví dụ khó hơn.

**Ví dụ 5 :** Hàm số  $y = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; 0)$  và  $(4; +\infty)$     B.  $(-\infty; 0)$  và  $(0; 2)$     C.  $(0; 2)$  và  $(2; 4)$     D.  $(2; 4)$  và  $(4; +\infty)$

**Hướng dẫn:**

$$y' = \frac{(-2x+2)(x-2) - (-x^2+2x-4)}{(x-2)^2} = \frac{-x^2+4x}{(x-2)^2}; y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 2 < x \leq 4 \end{cases} \rightarrow C$$

Để làm bài nhanh thì khuyến cáo các bạn nên dùng **d/dx**

Trước hết là thử các đáp án có vùng rộng như A, B, D

Với  $x = 100$  đặc trưng cho đáp án A và D

$$\left. \frac{-x^2+2x-4}{x-2} \right|_{x=100} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{-x^2+2x-4}{x-2} \right) \Big|_{x=100} = -0.9995835069$$

Vậy loại được A và D, tiếp theo thử với  $x = -100$  đặc trưng cho đáp án B

$$\left. \frac{-x^2+2x-4}{x-2} \right|_{x=-100} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{-x^2+2x-4}{x-2} \right) \Big|_{x=-100} = -0.9996155325$$

Vậy loại đáp án B, và chỉ còn C nên đây là đáp án đúng. Việc làm bằng thủ thuật như thế này không chỉ giúp các em làm nhanh mà cũng tránh nhầm lẫn do nhân chia hay nhớ sai công thức đạo hàm của phân thức.

**Ví dụ 6 :** Hàm số  $y = \frac{3x}{x^2+1}$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$     B.  $(-1; 1)$     C.  $(-\infty; -1)$     D.  $(1; +\infty)$

**Hướng dẫn**

<b>x</b>	$-\infty$	<b>-1</b>	<b>1</b>	$+\infty$		
<b>f'(x)</b>		-	0	+	0	-
<b>f(x)</b>				$\frac{3}{2}$		
	0					0

$$\text{TXĐ: } \mathbb{R}, y' = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ , đồng biến trên  $(-1; 1)$

Casio : các em tự thực hành rồi đối chiếu với đáp án

**Ví dụ 7:** Hàm số  $y = \frac{x+1}{3\sqrt{x}}$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $(1; +\infty)$  và  $(0; 1)$

B.  $(1; +\infty)$

C.  $(0; 1)$

D.  $(-1; 0)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

$$\text{TXĐ} = [0; +\infty), y' = \frac{x-1}{6x\sqrt{x}}.$$

Hàm số nghịch biến trên  $(0; 1)$ , đồng biến trên  $(1; +\infty)$ . **Casio** : các em tự thực hành rồi đối chiếu với đáp án

**Ví dụ 8:** Hàm số  $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$  đồng biến trên khoảng nào?

A.  $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

B.  $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

C.  $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$

D.  $(-2; 3)$

Hướng dẫn:

$$\text{TXĐ: } -2; 3$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}; y' \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \rightarrow C$$

**Casio** : các em tự thực hành rồi đối chiếu với đáp án

**Ví dụ 9[Hàm lượng giác].** Hàm số  $y = \sin^2 x + \cos x + 1; x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  đồng biến trên các khoảng

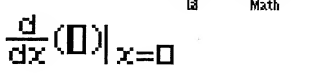
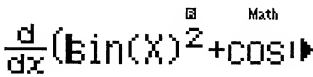
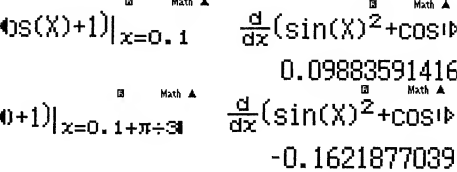
A. Trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

B. Trên  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

C.  $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$

D.  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$

### Hướng dẫn

<p><b>Bước 1:</b>  <b>Chọn hệ radian</b>  <math>\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{4}</math>          Gọi d/dx Program  <math>\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\int \frac{d}{dx}}</math></p>	
<p><b>Bước 2:</b> Nhập biểu thức</p>	
<p><b>Bước 3:</b> Chọn giá trị đặc trưng của m ở từng đáp án.          Xét đáp án A, B <math>\rightarrow x = 0.1</math>          Vậy loại C, xét xem A hay B đúng <math>x = \frac{\pi}{3} + 0.1</math>          Vậy loại A chọn B</p>	

### Dạng 2: Bài toán chứa tham số

**Ví dụ 1:** Với giá trị nào của m, hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m+1)x - 3m + 2$  nghịch biến trên R ?

A.  $m = -\frac{5}{2}$

B.  $m \geq -\frac{5}{2}$

C.  $m > -\frac{5}{2}$

D.  $m \leq -\frac{5}{2}$

### Hướng dẫn

$y' = -x^2 + 4x + (2m+1)$  để hàm số nghịch biến trên R thì

$$\Delta' = 4 + (2m+1) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}$$

**Giải nhanh bằng Casio:** Sử dụng tính năng d/dx

<p><b>Bước 1:</b> Gọi d/dx Program</p> <p><b>SHIFT</b> <b>∫dx</b></p>	<p><math>\frac{d}{dx}(\square) \Big _{x=\square}</math></p>
<p><b>Bước 2:</b> Nhập biểu thức và thay m = Y,</p> <p><b>CE</b> <b>=</b> <b>1</b> <b>▼</b> <b>3</b> <b>▶</b> <b>ALPHA</b> <b>)</b> <b>SHIFT</b> <b>x<sup>2</sup></b> <b>+</b> <b>2</b></p> <p><b>ALPHA</b> <b>)</b> <b>x<sup>2</sup></b> <b>+</b> <b>(</b> <b>2</b> <b>ALPHA</b> <b>S+D</b> <b>+</b> <b>1</b> <b>)</b> <b>ALPHA</b></p> <p><b>)</b> <b>=</b> <b>3</b> <b>ALPHA</b> <b>S+D</b> <b>+</b> <b>2</b></p> <p>Ở đây đề yêu cầu là nghịch biến trên R nên để X=10</p> <p>Ấn <b>≡</b> để lưu lại biểu thức</p>	<p><math>\frac{d}{dx}((2Y+1)X-3Y+2) \Big _{x=10}</math></p> <p><math>\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{3}X^3+2X^2+(2Y\right)</math></p> <p>-995999</p>
<p><b>Bước 3:</b> Chọn giá trị đặc trưng của m ở từng đáp án. Thử đáp án A: Gán <math>\frac{-5}{2}</math> vào Y</p> <p><b>=</b> <b>5</b> <b>CE</b> <b>2</b> <b>SHIFT</b> <b>RCL</b> <b>S+D</b></p> <p>Sau đó <b>▲</b> để quay lại biểu thức vừa lưu rồi ấn <b>≡</b> (Hoặc dùng <b>CALC</b> X=, Y=)</p> <p>Vậy A thỏa mãn (loại C) nhưng các bạn vẫn phải kiểm tra đáp án B và D bằng cách gán Y là 100 và -100</p> <p>Chọn giá trị <math> Y  &gt;  X^\alpha </math> để giảm sự phụ thuộc vào x, khi x lớn trừ khi các em phải để m cực lớn mới thấy được sự khác biệt giữa các đáp án nên chọn x vừa tầm thôi cho m to to lên cỡ <math> m  \approx  X^\alpha </math>, <math>\alpha</math> là số mũ cao nhất</p> <p>Vậy loại B chọn D</p>	<p><math>-\frac{5}{2} \rightarrow Y</math></p> <p><math>-\frac{5}{2}</math></p> <p><math>\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{3}X^3+2X^2+(2Y\right)</math></p> <p>-996004</p> <p><math>\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}X^3+2X^2+(2Y\right)</math></p> <p>341 (m=100)</p> <p><math>\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}X^3+2X^2+(2Y\right)</math></p> <p>-59 (m= -100)</p>

**Ví dụ 2:** Với giá trị nào của m, hàm số  $y = mx^3 - 3x^2 + (m-2)x + 3$  nghịch biến trên R?

- A.  $m = -1$       B.  $m = 0$       C.  $m > -1$       D.  $m \leq -1$

### Hướng dẫn

TXĐ: R. Ta có:  $y' = 3mx^2 - 6x + m - 2$

Hàm số nghịch biến trên R khi và chỉ khi  $y' = 3mx^2 - 6x + m - 2 \leq 0, \forall x \in R$

**TH 1:**  $m = 0$ , khi đó  $y' = -6x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ : không thỏa  $\forall x \in R$ .

TH2:  $m \neq 0$  ta có :

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 9 - 3m(m-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 + 6m + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -1 \vee m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

**Giải nhanh bằng Casio: Sử dụng tính năng CALC**

<p><b>Bước 1:</b> Viết biểu thức đạo hàm trực tiếp trên máy và chú ý thay thế <math>m=Y</math></p> <p><math>\boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{S}\cdot\text{D}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{6} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+}</math>  <math>\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{S}\cdot\text{D}} \boxed{-} \boxed{2}</math></p>	<p><math>3YX^2 - 6X + Y - 2</math></p>
<p><b>Bước 2:</b> CALC với X (cố định) là 1 giá trị thuộc khoảng cần xét và Y là 1 giá trị đặc trưng cho đáp án</p> <p>Chúng ta thử đáp án A với <math>Y = -1</math> và <math>X = 100</math></p> <p><math>\boxed{\text{CALC}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{=}</math>  <math>\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=}</math></p> <p>Vậy là giá trị biểu thức âm nên A, Có thể thỏa mãn</p> <p>Tương tự với đáp án D thì chọn <math>Y = -100</math></p>	<p>Y? X? Math <math>\Delta</math></p> <p><math>3YX^2 - 6X + Y - 2</math></p> <p>-1 100</p> <p>-30603</p> <p>Y? X? Math <math>\Delta</math></p> <p>-100 100</p> <p>-3000702</p>
<p><b>Bước 3:</b> Chọn Đáp án</p>	<p><b>D</b></p>

**Ví dụ 3:** Cho hàm số  $y = \frac{mx - m^2 + 3}{x + 2}$ , tìm m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A.  $-3 < m < 1$       B.  $m \neq -2$       C.  $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$       D.  $-3 \leq m \leq 1$

Hướng dẫn:

$$y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + 2)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \rightarrow C$$

**Ví dụ 4.** Hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 - m + 1$  đồng biến trên  $[0; 2]$  khi

- A.  $m \geq -1$       B.  $m \leq -1$       C.  $m \geq \frac{11}{9}$       D.  $m \leq \frac{11}{9}$

**Hướng dẫn**

Khởi động d/dx và nhập biểu thức cần xét thay  $m=Y$

$$\frac{d}{dx}(X^3 - 2YX^2 - (Y+1)X+1) \Big|_{x=0.1}$$

Sau đó CALC , máy hỏi X? thì cứ ấn = (không ảnh hưởng gì đâu) còn máy hỏi Y? thì nhập

100= đối với đáp án A và C được

$$\frac{d}{dx}(X^3 - 2YX^2 - (Y+1)X+1) \Big|_{x=0.1}$$

-140.97

Vậy loại luôn A, C và rõ ràng chỉ có thể B hoặc D đúng thì các em xét sự khác biệt  $m=0$

CALC X? = Y? 0=

$$\frac{d}{dx}(X^3 - 2YX^2 - (Y+1)X+1) \Big|_{x=0}$$

-97  
100

Vậy loại đáp án D nên chỉ có thể là đáp án B đúng

**Ví dụ 4:** Tìm m để hàm số  $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$  nghịch biến trên  $[1; +\infty)$

A.  $m \leq -1$       B.  $m \leq \frac{-14}{5}$       C.  $m > -1$       D.  $m > \frac{-14}{5}$

**Hướng dẫn:**

Sử dụng máy tính các em làm như sau:

Xét đáp án A,B các em lấy giá trị  $|m| \gg |x|$  để giảm sự ảnh hưởng của x tới kết quả

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-100X^2 + 6X - 2}{X + 2}\right) \Big|_{x=1.1}$$

-56.91987513

Xét đáp án A với  $m = -1$  ta sẽ loại được A và chọn B

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-x^2+6x-2}{x+2} \right) \Big|_{x=1} = 0.8730489074$$

Tự luận thì các em làm như sau :

Ta có:  $y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2}$

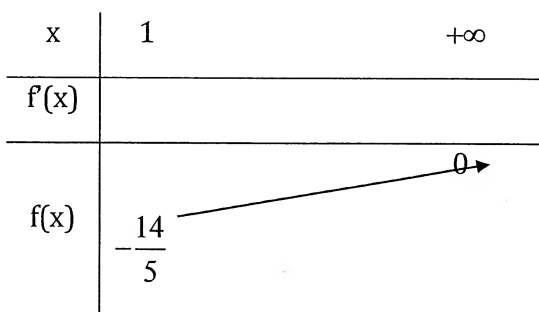
Hàm số nghịch biến trên  $1; +\infty \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow mx^2 + 4mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1$

Đến đây ta cô lập m để xét hàm số

$$\Leftrightarrow m(x^2 + 4x) \leq -14, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{-14}{x^2 + 4x}, \forall x \geq 1$$

Bài toán trở thành: Tìm m để hàm số  $f(x) = \frac{-14}{x^2 + 4x}, \forall x \geq 1$

Ta có:  $f'(x) = \frac{14(2x+4)}{(x^2+4x)^2}, \forall x \geq 1$



Ta cần có:  $\min f(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq \frac{-14}{5}$ . Vậy  $m \leq \frac{-14}{5}$  là các giá trị cần tìm của m.

Cách làm theo hình thức tự luận khá là dài và tốn thời gian nên không phù hợp với hình thức trắc nghiệm đòi hỏi nhanh và đúng, ở ví dụ này các em sử dụng máy tính casio sẽ thấy sự khác biệt rõ rệt về tốc độ lưu ý là thông thường lấy  $m \gg |x^\alpha|$  với  $\alpha$  là số mũ cao nhất để giảm sự phụ thuộc của kết quả vào  $x$

**Ví dụ 5:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$

đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

A.  $m \leq 0$  hoặc  $1 \leq m \leq 2$     B.  $m \leq 0$     C.  $1 \leq m \leq 2$     D.  $m \geq 2$

**Anh đã hướng dẫn ví dụ này ở đề phần chữa đề minh họa.**

**Ví dụ 6 [Đề Thử Nghiệm]:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

A.  $(-\infty; -1]$ .    B.  $(-\infty; -1)$ .    C.  $[-1; 1]$ .    D.  $[1; +\infty)$ .

**Hướng dẫn:** Chọn giá trị đặc trưng của các đáp án, thử  $m = -100$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 1) - 100x)$$

$$-99.980002$$

Vậy loại D, xét  $m = 100$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 1) + 100x)$$

$$100.019998$$

Vậy A hoặc B đúng, xét nốt tại  $m = -1$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 1) - x)$$

$$1.019998$$

Vậy khoanh A



## Tổng Kết

Đối với những bài cho khoảng rộng thì ưu tiên dùng  $d/dx$  khoảng hẹp thì dùng Table.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\sin x - 2m}{1 - \sin^2 x}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

A.  $\begin{cases} m < 0 \\ \frac{1}{4} < m \leq \frac{5}{8} \end{cases}$       B.  $m \leq \frac{5}{8}$       C.  $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$       D.  $m \leq 1$

## Hướng dẫn

Xét  $m=1$  xem đáp án D đúng không vì A,B,C không chứa  $m=1$

MODE 7  $\frac{\pi}{6}$  sin ALPHA ) ) = 2 ( 1 )  $\frac{\pi}{6}$  1 = sin ALPHA ) )  $x^2$

$$f(x) = \frac{\sin(x) - 2(1)}{-\sin(x)^2}$$

Nhớ tắt G(x): SHIFT MODE  $\frac{\pi}{6}$  5 1

Start 0 = End  $\frac{\pi}{6}$  = Step  $\frac{\pi}{48}$  =

X	F(X)
4 0.1963	-1.876
5 0.2617	-1.866
6 0.3272	-1.857

-1.871979712

Các em thấy nó vừa đồng biến vừa nghịch biến nên loại D, xét  $m=-1$  để kiểm tra A,B


AC  $\frac{\pi}{6}$   $\frac{\pi}{6}$   $\frac{\pi}{6}$   $\frac{\pi}{6}$  DEL = 1 = = = =

$$f(x) = \frac{\sin(x) - 2(-1)}{\sin(x)^2}$$

X	F(X)
6 0.3272	2.7914
7 0.3926	3.0362
8 0.4581	3.2810

2.588937063

Vậy  $m=-1$  hàm đồng biến trên khoảng đã cho, các em xét tiếp  $m=0.1$ , B có mà A không có

$$f(x) = \frac{x^3 - 2(0.1)}{\sin(x)^2}$$


Các em thấy giá trị hàm luôn tăng như vậy B đúng

**Dạng hàm bậc 3 đồng biến / nghịch biến trên R thì các em dùng công thức giải nhanh**

**Câu 38:** Cho hàm số  $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$  với là  $m$  tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$  ?

- A. 7      B. 4      C. 6      D. 5

**Hướng dẫn**

Dạng này các em dùng công thức cho nhanh

Hàm bậc 3 đồng biến trên R :  $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$       nghịch biến trên R :  $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow m^2 - 3(-1)(4m+9) \leq 0 \rightarrow -9 \leq x \leq -3 \text{ Vậy khoanh A}$$

**Dạng hàm bất kì nào đó đồng biến / nghịch biến trên R thì các em xét  $d/dx$  tại  $x = \pm 100$  và với giá trị tham số đặc trưng cho các đáp án.**

**Ví dụ 6 [Đề thử nghiệm]**

**Bài tập rèn luyện**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x^4 - 8x^2 - 4$ . Các khoảng đồng biến của hàm số là

- A.  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .      B.  $(-2; 0)$  và  $(0; 2)$ .      C.  $(-\infty; -2)$  và  $(0; 2)$ .      D.  $(-\infty; -2)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .      B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .      D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Câu 3.** Trong các hàm số sau hàm nào đồng biến trên  $\mathbb{R}$  ?

- A.  $y = x^4 + x^2 - 1$ .      B.  $y = \frac{x+1}{x+3}$ .      C.  $y = x^2 + 1$ .      D.  $y = x^3 + x$ .

**Câu 4.** Cho hàm số:  $y = x\sqrt{3-2x}$ . Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. Đạo hàm của hàm số là:  $y' = \frac{3-3x}{\sqrt{3-2x}}$ .      B. Hàm số có một điểm cực trị.  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .      D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Câu 5.** Cho các hàm số  $f(x) = x^5 - x^3 + 2x$ ;  $y = x^3 + 1$ ;  $y = -x^3 - x - 4\sin x$ . Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định của chúng.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

**Câu 6.** Hàm số  $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$  và  $(1; \frac{3}{2})$ . B.  $(\frac{3}{2}; +\infty)$ . C.  $(1; \frac{3}{2})$ . D.  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 7.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ . B.  $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$ . C.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ . D.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ .

**Câu 8.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ ?

- A.  $y = \frac{1}{x}$ . B.  $y = x^3 - 3x + 1$ . C.  $y = \frac{1}{x^2}$ . D.  $y = -\frac{1}{x}$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) > 0, \forall x > 0$ . Biết  $f(1) = 2$ , hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

- A.  $f(2) + f(3) = 4$ . B.  $f(-1) = 2$ . C.  $f(2) = 1$ . D.  $f(2016) > f(2017)$ .

**Câu 10.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$  nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

- A.  $m > 6$ . B.  $m = 9$ . C.  $m < 0$  hoặc  $m > 6$ . D.  $m < 0$ .

**Câu 11.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$  đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A.  $-2 \leq m \leq 1$ . B.  $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$ . C.  $-2 < m < 1$ . D.  $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$ . B.  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ . C.  $-2 \leq m \leq -1$ . D.  $-2 < m < -1$ .

**Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$

- A.  $m > 2$ . B.  $m \leq 2$ . C.  $m < 1$ . D.  $m \geq 1$ .

**Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x - \frac{mx^2}{2} + 2x + 2017$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

- A.  $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$ . B.  $m \leq 2\sqrt{2}$ . C.  $-2\sqrt{2} \leq m$ . D.  $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ .

**Câu 15.** Tất cả các giá trị  $m$  để hàm số  $y = mx^3 + mx^2 + (m-1)x - 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là:

- A.  $m < 0$ . B.  $m \geq 0$ . C.  $m \geq \frac{3}{2}$ . D.  $0 < m < \frac{3}{2}$ .

**Câu 16.** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - x + 1} - mx$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

- A.  $m < -1$ . B.  $m \leq -1$ . C.  $m < 1$ . D.  $-1 < m < 1$ .

**Câu 17.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$  đồng biến trong khoảng  $(0; 3)$ ?

- A.  $m \geq \frac{12}{7}$ . B.  $m < \frac{12}{7}$ . C.  $m \in \mathbb{R}$ . D.  $m > \frac{7}{12}$ .

**Câu 18.** Điều kiện cần và đủ của  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$  nghịch biến trên khoảng  $(2; 3)$  là

- A.  $m \in (1; 2)$ . B.  $m < 1$ . C.  $m > 2$ . D.  $m \in [1; 2]$ .

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$  (1). Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ ?

- A.  $m \leq 1$ . B.  $m < 0$ . C.  $0 \leq m \leq 1$ . D.  $m \leq 0$ .

**Câu 20.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{x-1}{x+m}$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$

- A.  $m \in [-1; +\infty)$ . B.  $m \in (-\infty; -2)$ . C.  $m \in (2; +\infty)$ . D.  $m \in (-1; +\infty)$ .

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 1$  ( $m$  là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của  $m$  để hàm số trên luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m = 1$ . B.  $m = -2$ . C.  $m = 3$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x}{x-m}$  nghịch biến trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ .

- A.  $0 < m < 1$ . B.  $0 < m \leq 1$ . C.  $0 \leq m < 1$ . D.  $m > 1$ .

**Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \sin x + \cos x + mx$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

A.  $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ .    B.  $m \leq -\sqrt{2}$ .    C.  $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ .    D.  $m \geq \sqrt{2}$ .

**Câu 24.** Tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2017$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  sao cho  $b - a > 3$  là

A.  $m > 6$ .    B.  $m = 9$ .    C.  $m < 0$ .    D.  $\begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}$ .

**Câu 25.** Với các giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2mx - 2$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

A.  $m \leq \frac{4}{3}$ .    B.  $m \leq -\frac{3}{2}$ .    C.  $m \leq -\frac{16}{3}$ .    D.  $m \leq -\frac{32}{27}$ .

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = mx - \sin x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

A.  $m > 1$ .    B.  $m \geq -1$ .    C.  $m \geq 1$ .    D.  $m \geq 0$ .

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

A.  $m \geq -\frac{13}{2}$ .    B.  $m \geq -2\sqrt{3}$ .    C.  $m \leq 2\sqrt{3}$ .    D.  $m \geq \frac{13}{2}$ .

**Câu 28.** Tất cả giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$  là

A.  $m \geq 0$ .    B.  $m \leq 0$ .    C.  $m \geq 12$ .    D.  $m \leq 12$ .

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = mx^3 + 3mx^2 - 3x + 1$ . Tìm tập hợp tất cả các số thực  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

A.  $-1 < m < 0$ .    B.  $-1 \leq m < 0$ .    C.  $m \geq 0 \vee m \leq -1$ .    D.  $-1 \leq m \leq 0$

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{\cot x - 1}{m \cot x - 1}$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

A.  $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ .    B.  $m \in (-\infty; 0)$ .    C.  $m \in (1; +\infty)$ .    D.  $m \in (-\infty; 1)$ .

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2017$ . Định  $m$  để phương trình  $y' = m^2 - m$  có đúng hai nghiệm thuộc đoạn  $[0; m]$ .

A.  $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}; 2\right)$ .    B.  $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{3}; 2\right)$ .    C.  $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2}; 2\right)$ .    D.  $\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2}; 2\right)$ .

**Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m^2 - 1)x^4 - 2mx^2$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$

A.  $m \leq -1$  hoặc  $m > 1$  B.  $m \leq -1$  hoặc  $m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  C.  $m = -1$  hoặc  $m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  D.  $m \leq -1$

Câu 33. Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{2\cos x + 1}{\cos x - m}$  đồng biến trên  $(0; \pi)$ .

A.  $m \leq -1$ . B.  $m \geq -\frac{1}{2}$ . C.  $m \geq 1$ . D.  $m > -\frac{1}{2}$ .

Câu 34. Tìm  $m$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (m+1)x - m + 3$  đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

A.  $m = -1$  hoặc  $m = 2$  B.  $m = -1$  C. Không tồn tại  $m$ . D.  $m = 2$

Câu 35. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

A.  $[-1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 0]$ . C.  $[0; 1]$ . D.  $[-1; 0]$ .

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ :

A.  $\begin{cases} -3 < m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ . B.  $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 2 \end{cases}$ . C.  $m < -3$ . D.  $m > -3$

1.A	2.A	3.D	4.D	5.B	6.D	7.D	8.B	9.B	10.B
11.C	12.C	13.D	14.D	15.C	16.B	17.A	18.D	19.A	20.D
21.D	22.A	23.D	24.D	25.B	26.C	27.B	28.C	29.D	30.B
31.D	32.B	33.C	34.A	35.D	36.C				

## Cực Trị Hàm Số

**Định lý 1.** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $K = (x_0 - h; x_0 + h)$  và có đạo hàm trên  $K$  hoặc  $K \setminus x_0$  ( $h > 0$ ).

TH1:  $f'(x) > 0$  trên  $(x_0 - h; x_0)$  và  $f'(x) < 0$  trên  $(x_0; x_0 + h)$  thì  $x_0$  là một điểm CĐ của  $f(x)$ .

TH2:  $f'(x) < 0$  trên  $(x_0 - h; x_0)$  và  $f'(x) > 0$  trên  $(x_0; x_0 + h)$  thì  $x_0$  là một điểm CT của  $f(x)$ .

**Nhận xét:** Hàm số có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm không xác định.

**Quy tắc 1 tìm cực trị hàm số (dựa vào định lý 1).**

- ★ Tìm tập xác định.
- ★ Tính  $f'(x)$ . Tìm các điểm tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.
- ★ Lập bảng biến thiên.
- ★ Từ bảng biến thiên dựa vào định lý 1 suy ra các điểm cực trị.

**Định lý 2.** Giả sử  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trong  $(x_0 - h; x_0 + h)$   $h > 0$ .

Nếu  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.

Nếu  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại.

**Quy tắc 2 tìm cực trị hàm số (dựa vào định lý 2).**

- ★ Tìm tập xác định.
- ★ Tính  $f'(x)$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0$  và kí hiệu  $x_i$  là nghiệm
- ★ Tìm  $f''(x)$  và tính  $f''(x_i)$ .
- ★ Dựa vào dấu của  $f''(x_i)$  suy ra tính chất cực trị của  $x_i$ .

## I. Dạng toán điểm cực trị

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ . Hàm số đạt cực tiểu khi?

- A.  $x = 0$       B.  $x = 1$       C.  $x = 2$       D.  $x = 3$

**Hướng dẫn:**

★ TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

★  $y' = -3x^2 + 6x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

★ Bảng biến thiên:

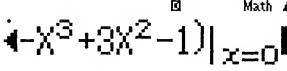
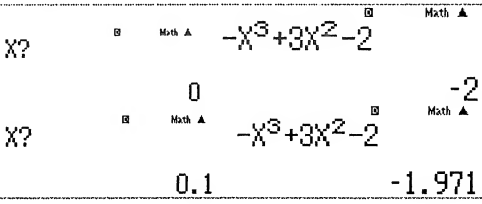
$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	
		CT	CĐ		

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2, y_{CD} = 3$ ; hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0, y_{CT} = -1$ .

### Casio giải nhanh:

Để thỏa mãn là cực tiểu thì nó phải thỏa mãn 2 điều kiện:  $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0 \end{cases}$  theo định lí 2

nhưng để làm nhanh trước hết các bạn xét  $y' = 0$

<b>Bước 1.</b> Kiểm tra $y' = 0$ với $d/dx$ Ta được $x = 0, x = 2$	
<b>Bước 2.</b> Kiểm tra giá trị lân cận $f(x+0.1)$ Và so sánh với $f(x)$ với CALC Vậy giá trị hàm đang đi lên do đó $x = 0$ là một cực tiểu ở bài này	
<b>Bước 3.</b> Chọn đáp án	

**Ví dụ 2.** Cho hàm số:  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + m^2 - m + 1$ . Tìm  $m$  để hàm số

a) Có cực đại và cực tiểu.

A.  $m = 1$       B.  $m > 1$       C.  $m \neq 1$       D.  $m < 1$

b) Đạt cực đại tại điểm  $x = 1$

A.  $m = 0$       B.  $m = 1$       C.  $m = 2$       D.  $m = 3$

### Hướng dẫn

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm:  $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

a) Tìm  $m$  để hàm số có cực đại và cực tiểu.

Hàm số có cực đại và cực tiểu  $\Leftrightarrow y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} \neq 0 \\ \Delta'_{y'} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ -m^2 - m^2 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

b) Tìm  $m$  để hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 1$

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$  và  $y'' = 2x - 2m$

$$\text{Hàm số đạt cực đại tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y' \big|_{x=1} = 0 \\ y'' \big|_{x=1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy khi  $m = 2$  hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$

**Casio:** Các em giải nhanh phương trình  $y' = 0$  thay  $x = 1$  vào còn để  $m$  là X



<b>Bước 1. Nhập phương trình</b>	$1^2 - 2X + X^2 - X + 1$
<b>Bước 2. Gọi Solve Program</b> $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$ Sau đó $\boxed{\leftarrow}$ để sửa rồi Solve tiếp Vậy có $m=1, m=2$	Solve for $X$ $1^2 - 2X + X^2 - X + 1$ $X =$ $2 \quad L-R =$ $0$ $4 + X^2 - X + 1 \div (X-2)$ $(1^2 - 2X + X^2 - X + 1) \div$ $X =$ $L-R =$ $1$ $0$
<b>Bước 3. Tính <math>y''</math></b> Vậy được $m=2$	$2-2 \times 2$ $-2$ $2-2 \times 1$ $0$

## II. Dạng toán 2 cực trị

★Viết phương trình qua 2 cực trị:

Ví dụ 1. Viết PT đường thẳng qua 2 cực trị của hàm số  $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$

A.  $y = \frac{-14}{9}x + \frac{7}{9}$    
 B.  $y = \frac{-14}{9}x - \frac{7}{9}$    
 C.  $y = \frac{14}{9}x + \frac{7}{9}$    
 D.  $y = \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$

<b>Bước 1. Vào CMPLX</b>	
$\boxed{\text{MODE}} \boxed{2}$ <b>Bước 2. Tính pt theo công thức:</b> $y = \frac{y' \cdot y''}{18a}$ $\boxed{(\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{=} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{=} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+}$ $\boxed{1} \boxed{)} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{(\boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{=} \boxed{4} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-}$ $\boxed{1} \boxed{)} \boxed{(\boxed{6} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{=} \boxed{4} \boxed{)} \boxed{\downarrow} \boxed{1} \boxed{8}$	$\frac{2-4X-1}{18} (6X-4)$
<b>Bước 3. CALC với <math>X=i</math></b> $\boxed{\text{CALC}} \boxed{\text{ENG}} \boxed{=}$ Các em thay lại $i = x \rightarrow y = \frac{-14}{9}x + \frac{7}{9}$	$(X^3 - 2X^2 - X + 1) \rightarrow$ $\frac{7}{9} - \frac{14}{9}i$

Ví dụ 2. Viết PT ĐT qua 2 cực trị của hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$

A.  $y = 2x - m$    
 B.  $y = -2x - m$    
 C.  $y = 2x + m$    
 D.  $y = -2x + m$

<b>Bước 1. Vào CMPLX</b>	
$\boxed{\text{MODE}} \boxed{2}$	

**Bước 2. Tính pt theo công thức:**

AC ( ) ALPHA ) SHIFT  $x^2$  = 3 ALPHA S+D ALPHA )  $x^2$  +  
 3 ( ) ALPHA S+D  $x^2$  = 1 ) ALPHA ) - ALPHA S+D SHIFT  
 $x^2$  ) - = ( 3 ALPHA )  $x^2$  = 6 ALPHA S+D ALPHA  
 ) + 3 ( ) ALPHA S+D  $x^2$  = 1 ) ) ( 6 ALPHA  
 ) = 6 ALPHA S+D ) ▼ 1 8

$$\frac{3x^2 - 6yx + 3(y^2 - 1)}{18i}$$

**Bước 3. CALC với X=i, Y=1000**

CALC ENG = 1 0 0 0 =

Các em thay lại  $1000 = m, i = x \rightarrow y = -2x - m \rightarrow B$

$$(x^3 - 3yx^2 + 3(y^2 - 1) - 1000 - 2i)$$

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ . Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng  $d: x + 8y - 74 = 0$ .

A.  $m = 1$ B.  $m = -2$ C.  $m = 2$ D.  $m = -1$ **Hướng dẫn**

Ta có  $y' = -3x^2 + 6mx$

(Anh cho  $m = 100$  thôi cho đỡ to)

Các em tính nhanh ra phương trình qua 2 cực trị :

$$(-x^3 + 3yx^2 - 3y - 1) \div (-301 + 20000i)$$

Vậy ra được phương trình là :

$$y = 2m^2x - 3m - 1 \rightarrow y_1 + y_2 = 2m^2(x_1 + x_2) - 6m - 2 = 4m^3 - 6m - 2$$

Cực đại và cực tiểu đối xứng tức là trung điểm 2 cực trị thuộc đường  $d$  nên

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + 8 \frac{y_1 + y_2}{2} - 74 = 0 \Leftrightarrow m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Các em dùng chương trình SOLVE với thao tác như sau:

MODE 1 ALPHA ) + 8 ( 2 ALPHA ) SHIFT  $x^2$  = 3 ALPHA ) = 1 ) = 7 4 SHIFT  
 CALC = =

Được kết quả :

$$x + 4((2x^2 - 3)(2x)) \div x = 2$$

**Ví dụ 4.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}mx^3 - m - 1x^2 + 3m - 2x + \frac{1}{3}$ . Tìm  $m$  để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 2x_2 = 1$

$$A. m = 2 \quad B. m = -\frac{2}{3} \quad C. m = 2, m = \frac{2}{3} \quad A. m = -2, m = \frac{2}{3}$$

**Hướng dẫn**

Làm chay nếu lười làm tự luận: Thay từng đáp án giải tìm  $x_1, x_2$

Nhập luôn vào máy y' không cần nháp

$$\begin{array}{ccc} \text{Math} & \text{Math} & \text{Math} \\ \text{Y} \text{X}^2 - 2(\text{Y} - 1)\text{X} + 3(\text{Y} - 1) & \text{Y} \text{X}^2 - 2(\text{Y} - 1)\text{X} + 3(\text{Y} - 1) & \text{Y} \text{X}^2 - 2(\text{Y} - 1)\text{X} + 3(\text{Y} - 1) \\ \text{X} = & 0 & \text{X} = 1 \\ \text{L} - \text{R} = & 0 & \text{L} - \text{R} = 0 \end{array}$$

Sau đó  $\text{SHIFT}$   $\text{CALC}$  máy hỏi Y? nhập 2=, máy hỏi X? thì nhập -9=

Được nghiệm là  $x = 0$

Sau đó lại bấm tương tự nhưng máy hỏi X? thì nhập 9=

Được nghiệm là  $x = 1$

Lưu ý là hàm bậc 3 hệ số dương thì  $-\infty \rightarrow +\infty$  thì cực đại xong tới cực tiểu nên đáp án này thỏa mãn

Tương tự với các giá trị m khác

Cách này không đòi hỏi tư duy cao nhưng lại hơi lâu vì phải thử nhiều lần

**Hướng làm chung thì chủ yếu làm theo tự luận nếu không dựa vào đáp án**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm:  $y' = mx^2 - 2m - 1x + 3m - 2$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} \neq 0 \\ \Delta'_{y'} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m - 1^2 - 3m - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Vì  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $y' = 0$  nên:  $x_1 + 2x_2 = 1$  (1)

$$\text{và} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2m-1}{m} & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m-2}{m} & (3) \end{cases} \quad \text{và}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x_1 = 3 - \frac{4}{m}, \quad x_2 = -1 + \frac{2}{m}$$

Bấm casio giải phương trình này cho nhanh

$$\text{Thay vào (3)} \Rightarrow \left(-1 + \frac{2}{m}\right)\left(3 - \frac{4}{m}\right) = \frac{3m-2}{m} \Leftrightarrow 3m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \quad (N) \\ m = \frac{2}{3} \quad (N) \end{cases}$$

Vậy:  $m = 2, m = \frac{2}{3}$  thỏa yêu cầu bài toán

**Ví dụ 5.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ . Khoảng cách giữa hai điểm cực đại, cực tiểu là không đổi là:

- A.  $|m|$       B.  $|m-2|$       C.  $\sqrt{2}$       D. 2

**Hướng dẫn**

Chọn  $m=0$  ta có:  $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 \rightarrow y' = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$

Khoảng cách:

$$\sqrt{1^2 + (2 - 3 + 1 - 1)^2} = 1.414213562$$

Vậy khoảng C

### III. Tam giác cực trị

Một số công thức chỉ mang tính chất tham khảo vì rất khó nhớ được hết những công thức này, cách làm thông thường thì các em cứ tính  $y' = 0 \rightarrow Xuli \rightarrow Casio$

**Ví dụ 1:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^4 + (m+2015)x^2 + 5$  có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông

- A. 2016      B. 2017      C. -2016      D. -2017

Công thức giải nhanh: Với  $a=1, b=m+2015$ . Từ  $8a+b^3=0 \Rightarrow b^3=-8 \Rightarrow m=-2017$

$$\text{Casio: } y' = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-(m+2015)}{2}} \end{cases} \rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \quad \text{Dùng Solve để tìm } m$$

Hoặc cách chạy là thay từng đáp án rồi giải ra cực trị và xét các vectơ

**Ví dụ 2:** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số

$y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng  $4\sqrt{2}$

- A.  $m=2$       B.  $m=\sqrt{2}$       C.  $m=-3$       D.  $m=1$

Hướng dẫn: Tam giác của chúng ta là tam giác cân có đường cao xác định rồi, cạnh

đáy cũng biết nên các em tính ngay  $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+1} \end{cases}$  rồi nhập luôn

vào máy:  $S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |2x_B| \cdot |y_A - y_B|$  dựa vào dạng đồ thị nhìn cho nhanh.

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{m+1} \times (m - (m-1)) = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{m+1} = 4$$

$$m+1 = 16$$

$$m = 15$$

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan cực trị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 cực trị : $ab \geq 0$		3 cực trị : $ab < 0$	
$a > 0$ : 1 cực tiểu	$a < 0$ : 1 cực đại	$a > 0$ : 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$ : 2 cực đại, 1 cực tiểu

Hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có ba cực trị  $A \in Oy, B, C$  tạo thành :

DỮ KIẾN	CÔNG THỨC	VÍ DỤ
Tam giác vuông cân	$8a + b^3 = 0$	m ? để hàm số $y = x^4 + (m+2015)x^2 + 5$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông Với $a=1, b=m+2015$ . Từ $8a+b^3=0 \Rightarrow b^3=-8 \Rightarrow m=-2017$
Tam giác đều	$24a + b^3 = 0$	m ? để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông Với $a=9/8, b=3(m-2017)$ . Từ $24a+b^3=0 \Rightarrow b^3=-27 \Rightarrow m=2016$
$BAC = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$	m ? để hàm số $y = 3x^4 + (m-7)x^2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc $120^\circ$ Với $a=3, b=m-7$ . Từ $8a+b^3=0 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow m=5$
$S_{\triangle ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$	m ? để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 + m - 2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 Với $a=m, b=2$ . Từ $32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0 \Rightarrow m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$
$\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{\frac{-b^5}{32a^3}}$	m ? để hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất Với $a=1, b=-2(1-m^2)$ . Từ $S_0 = \sqrt{(1-m^2)^5} \leq 1 \Rightarrow m=0$
$r_{\triangle ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{ a  \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{a}} \right)}$	m ? để hàm số $y = x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 Với $a=1/2, b=-m$ . Từ $r_0 \Rightarrow m=2$
$BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$	m ? để hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 + 1 - m$ có 3 cực trị mà trong đó có $BC = \sqrt{2}$ Với $a=m^2, b=-m$ . Từ $am_0^2 + 2b = 0 \Rightarrow m=1$ vì $m \neq 0$
$AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0$	m ? để hàm số $y = mx^4 - x^2 + m$ có 3 cực trị mà trong đó có $AC=0,25$ Với $a=m, b=-1$ . Từ $16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0 \Rightarrow m=3$ do $m > 0$
$B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$	m ? để hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có $B, C \in Ox$

		Với $a=1, b=-m, c=1$ . Từ $b^2-4ac=0 \Rightarrow m=2$ do $m>0$
Tam giác cân tại A	Phương trình qua điểm cực trị	$BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left( \sqrt{-\frac{b}{2a}} \right)^3 x + c$
Tam giác có 3 góc nhọn	$8a+b^3>0$	$m ?$ để hàm số $y = -x^4 - (m^2-6)x^2 + m+2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có 3 góc đều nhọn  Với $a=-1, b=-(m^2-6)$ . Từ $8a+b^3>0 \Rightarrow b>2 \Rightarrow -2 < m < 2$
Tam giác có tr.tâm O	$b^2-6ac=0$	$m ?$ để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm Với $a=1, b=m, c=-m$ . Từ $b^2-6ac=0 \Rightarrow m=-6$ do $m<0$
Tam giác có trục tâm O	$b^3+8a-4ac=0$	$m ?$ để hàm số $y = x^4 + mx^2 + m+2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có trục tâm O Với $a=1, b=m, c=m+2$ . Từ $b^3+8a-4ac=0 \Rightarrow m=-2$ do $m<0$
$R_{\Delta ABC} = R_0$	$R_0 = \frac{b^3-8a}{8 a b}$	$m ?$ để hàm số $y = mx^4 + x^2 + 2m-1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính $R=9/8$
Tam giác cùng O tạo hình thoi	$b^2-2ac=0$	$m ?$ để hàm số $y = 2x^4 + mx^2 + 4$ có 3 cực trị cùng gốc tọa độ O lập thành hình thoi Với $a=2, b=m, c=4$ . Từ $b^2-2ac=0 \Rightarrow m=-4$ do $m<0$
Tam giác ,tâm O nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$	$m ?$ để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 - 2$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn nội tiếp Với $a=m, b=2, c=-2$ . Từ $b^3-8a-4abc=0 \Rightarrow m=-1$ do $m<0$
Tam giác , tâm O ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$	$m ?$ để hàm số $y = -mx^4 + x^2 - 2m-1$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Với $a=-m, b=1, c=-2m-1$ . Từ $b^3-8a-8abc=0 \Rightarrow m=0,25$ do $m>0$

Hàm số  $y = ax^4 + 2bx^2 + c$  có 3 cực trị  $A \in Oy, B, C$  tạo thành :

DỮ KIẾN	CÔNG THỨC	VÍ DỤ
Tam giác vuông cân tại A	$a+b^3=0$	$m ?$ để hàm số $y = x^4 + 2(m+2016)x^2 + 2016m - 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân Với $a=1, b=m+2016$ . Từ $a+b^3=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow m=-2017$
Tam giác đều	$3a+b^3=0$	$m ?$ để hàm số $y = 9x^4 + 2(m-2020)x^2 + 2017m + 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều Với $a=9, b=m-2020$ . Từ $3a+b^3=0 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow m=2017$
$BAC = \alpha$	$a+b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$	$m ?$ để hàm số $y = 3x^4 + 2(m-2018)x^2 + 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc $120^\circ$

		Với $a=3, b=m-2018$ . Từ $a+b^3 \cdot \tan^2 60^\circ = 0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow m=2017$
$S_{\Delta ABC} = S_0$	$a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$	$m?$ để hàm số $y = mx^4 + 4x^2 + 2017m - 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$ Với $a=m, b=2$ . Từ $a^3(S_0)^2 + b^5 = 0 \Rightarrow m=-1$
$R_{\Delta ABC} = R_0$	$R_0 = \frac{1}{2 a } \left( b^2 - \frac{a}{b} \right)$	$m?$ để hàm số $y = mx^4 - 2x^2 + 2017m^3 - 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính ngoại tiếp bằng 1. Với $a=m, b=-1$ . Từ $R_0 = \frac{1}{2 a } \left( b^2 - \frac{a}{b} \right) \Rightarrow m=1$
$r_{\Delta ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{ a  \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{a}} \right)}$	$m?$ để hàm số $y = x^4 + 2(m+5)x^2 + 2016m^3 + 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính nội tiếp bằng 1 Với $a=1, b=m+5, r_0=1 \Rightarrow b \in \{-2; 1\} \Rightarrow m = -7 \vee m = -4$

### Ứng dụng Table giải nhanh toán cực trị cơ bản

**Ví dụ 1:** Hàm số  $y = |x^2 + 5x + 4|$  có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

### Hướng dẫn

Các em nhập hàm vào Table rồi cho Start  $-6$  End  $6$  Step  $0.5$  = rồi quan sát số cực trị

**MODE** **7** **SHIFT** **hyp** **ALPHA** **)** **x<sup>2</sup>** **+** **5** **ALPHA** **)** **+** **4** **=** **-** **6** **=** **6** **=** **0** **.** **5** **=**

$f(X) = |X^2 + 5X + 4|$



Các em để ý chỗ giá trị hàm tăng lên đỉnh rồi giảm xuống thì nó là cực đại, còn giảm xuống đáy xong lại tăng thì đó là cực tiểu, vậy hàm này có 3 cực trị

**Ví dụ 2:** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  đạt cực đại tại  $x=1$ .

A.  $m=-2$ .B.  $m=-1$ .C.  $m=2$ .D.  $m=1$ .

Hướng dẫn: Các em thay lần lượt từng giá trị  $m$  vào rồi cũng xét như ví dụ trên !

## Bài tập rèn luyện

**Câu 1.** Hàm số  $y = x^4 - 4x^3 - 5$

- A. Nhận điểm  $x = 3$  làm điểm cực đại.      B. Nhận điểm  $x = 0$  làm điểm cực đại.  
C. Nhận điểm  $x = 3$  làm điểm cực tiểu.      D. Nhận điểm  $x = 0$  làm điểm cực tiểu.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng  $-3$ .      B. Cực tiểu của hàm số bằng  $1$ .  
C. Cực tiểu của hàm số bằng  $-6$ .      D. Cực tiểu của hàm số bằng  $2$ .

**Câu 3.** Hàm số  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$  đạt cực đại tại:

- A.  $x = 1$ .      B.  $x = 2$ .      C.  $x = 3$ .      D.  $x = 0$ .

**Câu 4.** Đồ thị hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.      B. 2.      C. 0.      D. 3.

**Câu 5.** Hàm số  $y = |x^2 + 5x + 4|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.      B. 3.      C. 0.      D. 2.

**Câu 6.** Cho hàm số  $f$  có đạo hàm là  $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^3$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số  $f$  là

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 7.** Điểm cực tiểu của hàm số  $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$  là

- A.  $x \in [-1; 1]$ .      B.  $(-1; 1)$ .      C.  $-3$ .      D.  $(-3; -7)$ .

**Câu 8.** Để hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  đạt cực đại tại  $x = 2$  thì  $m$  thuộc khoảng nào?

- A.  $(0; 2)$ .      B.  $(-4; -2)$ .      C.  $(-2; 0)$ .      D.  $(2; 4)$ .

**Câu 9.** Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số  $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x - 2017$ .

- A.  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .      B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .      C.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .      D.  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .



**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^3$ . Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Có 3 điểm cực trị. B. Không có cực trị. C. Có 2 điểm cực trị. D. Chỉ có 1 điểm cực trị.

**Câu 11.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

A.  $m = -2$ . B.  $m = -1$ . C.  $m = 2$ . D.  $m = 1$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  thỏa mãn  $x_A^2 + x_B^2 = 2$ .

A.  $m = 0$ . B.  $m = \pm 1$ . C.  $m = \pm 3$ . D.  $m = 2$ .

**Câu 13.** Biết  $M(0; 2), N(2; -2)$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Tính giá trị của hàm số tại  $x = -2$ .

A.  $y(-2) = 2$ . B.  $y(-2) = 22$ . C.  $y(-2) = 6$ . D.  $y(-2) = -18$ .

**Câu 14.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + m - 1)x + 1$  đạt cực trị tại 2 điểm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 + x_2| = 4$

A. không tồn tại  $m$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = -2$ . D.  $m = \pm 2$ .

**Câu 15.** Đồ thị của hàm số  $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$  đạt cực tiểu tại  $M(x_1; y_1)$ . Tính tổng  $x_1 + y_1$

A. 5. B. -11. C. 7. D. 6.

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx + 1$  (1). Cho  $A(2; 3)$ , tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A.

A.  $m = \frac{-1}{2}$ . B.  $m = \frac{-3}{2}$ . C.  $m = \frac{1}{2}$ . D.  $m = \frac{3}{2}$ .

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$ . Tìm  $a$  để hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$ .

A.  $a = -1$ . B.  $a = 3$ . C.  $a = -3$ . D.  $a = 0$ .

**Câu 18.** Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

$x$	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

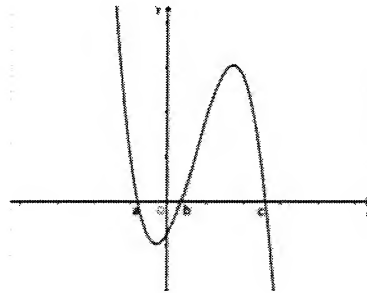
A.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$  B.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  C.  $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$  D.  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ .

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = 4x^3 + mx^2 - 12x$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = -2$ .

A.  $m = -9$ . B.  $m = 2$ . C. Không tồn tại  $m$ . D.  $m = 9$ .

Câu 20. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ  $a < b < c$  như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.  $f(c) > f(a) > f(b)$ .  
 B.  $f(c) > f(b) > f(a)$ .  
 C.  $f(a) > f(b) > f(c)$ .  
 D.  $f(b) > f(a) > f(c)$ .



Câu 21. Biết đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có 2 điểm cực trị là  $(-1; 18)$  và  $(3; -16)$ . Tính  $a + b + c + d$ .

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 22. Với giá trị nào của tham số thực  $m$  thì  $x = 1$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 + m + 1)x$ ?

A.  $m \in \{-2; -1\}$ . B.  $m = -2$ . C.  $m = -1$ . D. không có  $m$ .

Câu 23. Cho  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m + 3)x - 5$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Khi đó giá trị của  $m$  là

A.  $m \leq -\frac{3}{2}$ . B.  $m \geq -\frac{3}{2}$ . C.  $m < -\frac{3}{2}$ . D.  $m > -\frac{3}{2}$ .

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 2)x^2 + 2$  có hai cực tiểu và một cực đại.

A.  $m < -\sqrt{2}$  hoặc  $0 < m < \sqrt{2}$ . B.  $-\sqrt{2} < m < 0$ . C.  $m > \sqrt{2}$ . D.  $0 < m < \sqrt{2}$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = -2x^3 + (2m-1)x^2 - (m^2-1)x + 2$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

- A. 4.                      B. 5.                      C. 3.                      D. 6.

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + x^2 - (2m+1)x + 4$  có đúng hai cực trị.

- A.  $m < \frac{4}{3}$ .                      B.  $m > -\frac{2}{3}$ .                      C.  $m < -\frac{2}{3}$ .                      D.  $m > -\frac{4}{3}$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$ . Tìm  $m$  để hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = -1$ .                      C.  $m = 2$ .                      D.  $m = -2$ .

**Câu 28.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4 - 5$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m \neq 1$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m \neq -1$ .

**Câu 29.** Điều kiện cần và đủ của  $m$  để hàm số  $y = mx^4 + (m+1)x^2 + 1$  có đúng 1 điểm cực tiểu là

- A.  $m \in [-1; +\infty) \setminus \{0\}$                       B.  $m > -1$                       C.  $-1 < m < 0$                       D.  $m < -1$

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ . Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  sao cho  $|x_1 + x_2| = 2$ .

- A.  $m = 3$ .                      B.  $m = -1$ .                      C.  $m = 0$ .                      D.  $m = 1$ .

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$ . Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi  $m$  bằng

- A. 0.                      B. 1.                      C. -1.                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 32.** Hàm số  $y = x^3 - 3x + 1 - m$  có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi

- A.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ .                      B.  $m < -1$  hoặc  $m > 3$ .                      C.  $-1 < m < 3$ .                      D.  $-1 \leq m \leq 3$ .

**Câu 33.** Đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - x + m$  đi qua điểm  $M(3; -1)$  khi  $m$  bằng

- A. 1.                      B. -1.                      C. 0.                      D. một giá trị

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m^2 + 5m)x^3 - 6mx^2 - 6x + 7$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  ?

- A.  $m = 1$  hoặc  $m = -2$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = -2$ .                      D. Không có giá trị  $m$ .

**Câu 35.** Với giá trị nào của  $m$  thì hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$  nằm về hai phía so với trục hoành?

- A.  $m > 3$ . B.  $-1 < m < \sqrt{2}$ . C.  $m < 3$ . D.  $2 < m < 3$ .

**Câu 36.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$  ( $C_m$ ), với  $m$  là tham số. Xác định tất cả giá trị của  $m$  để cho đồ thị hàm số ( $C_m$ ) có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung?

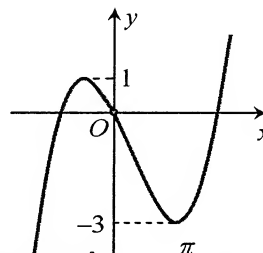
- A.  $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$ . B.  $0 < m < 2$ . C.  $m \neq 1$ . D.  $-\frac{1}{2} < m < 1$

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  có đồ thị ( $C$ ),  $m$  là tham số. ( $C$ ) có ba điểm cực trị  $A, B, C$  sao cho  $OA = BC$ ; trong đó  $O$  là gốc tọa độ,  $A$  là điểm cực trị thuộc trục tung khi:

- A.  $m = 0$  hoặc  $m = 2$ . B.  $m = 5 \pm 5\sqrt{5}$ . C.  $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ . D.  $m = 3 \pm 3\sqrt{3}$ .

**Câu 38.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x) + m|$  có ba điểm cực trị là

- A.  $m \leq -1$  hoặc  $m \geq 3$ . B.  $m \leq -3$  hoặc  $m \geq 1$ .  
C.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ . D.  $1 \leq m \leq 3$ .



**Câu 39.** Cho hàm số  $y = a \sin x + b \cos x + x$  ( $0 < x < 2\pi$ ) đạt cực trị tại điểm  $x = \frac{\pi}{3}$  và  $x = \pi$ .

Tính giá trị biểu thức  $T = a + b\sqrt{3}$ .

- A.  $T = 3\sqrt{3} + 1$ . B.  $T = 2\sqrt{3}$ . C.  $T = 2$ . D.  $T = 4$ .

**Bảng Đáp Án**

1.C	2.D	3.A	4.B	5.B	6.C	7.A	8.B	9.B	10.C
11.C	12.A	13.D	14.C	15.B	16.C	17.D	18.A	19.C	20.A
21.B	22.D	23.C	24.D	25.C	26.B	27.A	28.C	29.B	30.B
31.C	32.C	33.A	34.B	35.C	36.A	37.C	38.A	39.D	

## Dạng tìm max-min bằng Table

Thông thường, theo lí thuyết các em sẽ tìm các điểm  $y'=0$  hoặc không xác định, sau đó tính giá trị tại đó và 2 đầu mút nhưng cách này khá là lâu, để giải nhanh các em dùng Table.

Đây là tính năng bảng giá trị tính giá trị biểu thức với nhiều giá trị của  $x$  ( 20 giá trị). Các em lưu ý, khi mình xét giá trị 1 hàm thì nên tắt  $G(x)$  để tính được nhiều giá trị hơn (30 giá trị) chỉ dùng  $F(x)$  thôi

**SHIFT** **MODE** **▼** **5** **1**

1:ab/c 2:d/c     Select Type?  
3:CMPLX 4:STAT     1: f(x)  
5:TABLE 6:Rdec     2: f(x), g(x)  
7:Disp 8:CONT

**Ví dụ 1 [Hàm đa thức]:** Tìm Min của  $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}, x \in [3; 6]$

**Hướng dẫn**

<b>Bước 1:</b> Vào Table <b>MODE</b> <b>7</b>	$f(x) =$
<b>Bước 2:</b> Nhập biểu thức	$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$
<b>Bước 3:</b> khởi tạo giá trị start, end, step Cho Start 3 = , End 6 = , Step 0.2 = Vậy $f(x)_{\min} = f(3) = \frac{43}{3}$ <i>*Lưu ý là : <math>step = \frac{end - start}{1 \rightarrow 30}</math> sao cho đẹp 1 chút</i>	

**Ví dụ 2 [Hàm lượng giác loại 1]:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 1 + \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$  trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng:

A.  $\frac{2}{3}$

B.  $\frac{4}{3}$

C. -2

D. 0

**Hướng dẫn**

<b>Bước 1:</b> Chuyển sang hệ radian 	
<b>Bước 2:</b> Vào Table 	
<b>Bước 3:</b> Nhập biểu thức	
<b>Bước 4:</b> Khởi tạo giá trị start, end, step Cho Start $-\frac{\pi}{2}$ , End $\frac{\pi}{2}$ , Step $\frac{\pi}{12}$ Vậy $f(x)_{\min} = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}$ <i>*Lưu ý là: <math>step = \frac{\pi}{12} = 15^\circ</math>, các em tính biến x</i> <i>bằng cách: <math>x = start + (X-1)step</math></i> <i>Hoặc dùng thêm bảng G(x) nhập</i> $G(x) = \frac{180X}{\pi}$	

**Ví dụ 2 [Hàm lượng giác loại 2]:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x + \sin x$  trên

$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  bằng:

A. 0

B.  $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

C.  $\frac{\pi}{6} - 1$

D.  $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

<b>Bước 4:</b> Khởi tạo giá trị start, end, step Cho Start $-\frac{\pi}{2}$ , End $\frac{\pi}{2}$ , Step $\frac{\pi}{12}$ Vậy $f(x)_{\max} = f(-\frac{\pi}{6}) \rightarrow B$ Nhiều lúc đáp án từ table chỉ xấp xỉ nên các em chọn đáp án gần kết quả từ table nhất ví dụ nó xảy ra max-min ở $f(\frac{\pi}{5})$ mà theo table mình thấy tại $f(\frac{\pi}{4})$ thì cứ giá trị gần nhất mà đã nhé	 
--	------

**Ví dụ 3[Hàm mũ]:** Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x - \ln x$  trên  $\left[\frac{1}{2}; e\right]$  theo thứ tự là :

- A.  $\frac{1}{2} + \ln 2$  và  $e - 1$     B. 1 và  $e - 1$     C. 1 và  $\frac{1}{2} + \ln 2$     D.  $\frac{1}{2}$  và  $e$

### Hướng dẫn

**Bước 3:** Khởi tạo giá trị start, end, step

Cho Start  $0.5 =$ , End  $e =$ , Step  $0.1 =$

Vậy :

$$f(x)_{\min} = f(1) = 1,$$

$$f(x)_{\max} = f(e) = e - 1 \approx f(2.7) = 1.7$$

Nhiều lúc bấm từ table chỉ xấp xỉ nên các em chọn đáp án gần kết quả từ table nhất, tính chuẩn thì cũng được thôi nhưng chỉ thêm mất thời gian.

Math

$$f(X) = X - \ln(X)$$

Math

X	F(X)
0.9	1.0053
1.1	1.0046
2.6	1.6444
2.7	1.7067

Math

1

1.706748227

**Ví dụ 4.** Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  trên R. Tính M + m

- A.  $M + m = \frac{1}{3}$     B.  $M + m = \frac{11}{3}$     C.  $M + m = 3$     D.  $M + m = \frac{10}{3}$

### Hướng dẫn

Xét hàm  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  Start  $-14 =$ , End  $14 =$ , Step  $1 =$

Math

$$f(X) = \frac{X^2 - X + 1}{X^2 + X + 1}$$

Math

X	F(X)
-2	2.3333
-1	1
1	0.4285
2	0.4285
15	0.4285
16	0.4285

Math

3

1.3

**Ví dụ 5.** Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của  $y = \sin^3 x + 3 \cos^2 x + \sqrt{3} - 3$  trên R. Tính M + m

- A.  $M + m = 2\sqrt{3} - 2$     B.  $M + m = 2\sqrt{3} - 6$     C.  $M + m = 2\sqrt{3} - 4$     D.  $M + m = -4$

### Hướng dẫn

Xét hàm  $y = \sin^3 x + 3 \cos^2 x$  Start  $-\pi =$ , End  $\pi =$ , Step  $\frac{\pi}{12} =$

Math

$$f(X) = 4 + 3\cos(X)^2$$

Math

X	F(X)
-0.261	2.7817
0	2.8163
0.261	2.8163
1.57	-0.7
1.308	-0.7

Math

3

-1

$$\Rightarrow M + m = (3 + \sqrt{3} - 3) + (-1 + \sqrt{3} - 3) = 2\sqrt{3} - 4$$

**Ví dụ 5 [Hàm 2 biến]:** Cho  $y \geq 0, x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - y = 4$

Tìm  $\min A = x^2 y + 3xy + 5y + 27x + 35$

A.  $\min A = 8$

B.  $\min A = -8$

C.  $\min A = 15$

D.  $\min A = -1$

**Hướng dẫn**

$x^2 - 3x - 4 = y \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 4$  thế vào A được :  $A = (x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x - 4) + 27x + 35$

MODE 7  
 MODE 7 ( ( ALPHA ) )  $x^2$  + 3 ( ALPHA ) ) + 5 ) ( ( ALPHA ) )  $x^2$  - 3 ( ALPHA ) ) - 4 ) +  
 2 7 ( ALPHA ) ) + 3 5  
 Math  
 f(X)=4)+27X+35

Start -1= End 4= Step 0.2=

Math  
 15 1.8 F(X)  
 16 2.2 -0.422  
 17 2.2 -0.294  
 -1

Vậy khoanh đáp án D

**Ví dụ 6 [Hàm 2 biến]:** Xét  $x, y$  là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện  $x + y = 2$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x^2 y^2 - 4xy$

A.  $\min S = -3$

B.  $\min S = -4$

C.  $\min S = 0$

D.  $\min S = 1$

**Hướng dẫn**

$$\begin{cases} S = x^2 y^2 - 4xy = x^2 (2-x)^2 - 4x(2-x) \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

**Table :**

Math  
 f(X)=X^2(2-X)^2-4X



Start?

Math

End?

Math

Step?

Math

	X	F(X)
0	0.9	-2.979
1	1.1	-2.979

Vậy chúng ta khoanh A rất nhanh và đơn giản, chỉ cần xác định được hàm 1 biến và đoạn cần xét thì việc còn lại là của Table.

Nhiều em làm tự luận còn sai:  $S = x^2y^2 - 4xy = (xy - 2)^2 - 4 \geq -4 \rightarrow B$ : bởi vì không có dấu bằng nào xảy ra được khi  $xy = x + y = 2$  nên bấm được cứ bấm cho chắc

### Bài Tập Rèn Luyện

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng:

- A. -1.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 7.

**Câu 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$  là:

- A. 6.                      B. 11.                      C. 10.                      D. 15.

**Câu 3.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$  trên đoạn  $[1; 2]$  bằng 1.

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = 3$ .                      D.  $m = 0$ .

**Câu 4.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

- A.  $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .    B.  $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .    C.  $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ .    D.  $\max_R f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Câu 5.** Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  trên đoạn  $[-2; 4]$  là:

- A. -22.                      B. -2.                      C. -18.                      D. 14.

**Câu 6.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^3 - x^2 - 8x$  trên đoạn  $[1; 3]$

- A.  $\max_{[1;3]} y = -8$ .                      B.  $\max_{[1;3]} y = \frac{176}{27}$ .                      C.  $\max_{[1;3]} y = -6$ .                      D.  $\max_{[1;3]} y = -4$ .

**Câu 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x-1}$  trên đoạn  $[2; 4]$ .

- A.  $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$ .                      B.  $\min_{[2;4]} y = -3$ .                      C.  $\min_{[2;4]} y = -2$ .                      D.  $\min_{[2;4]} y = 6$ .

**Câu 8.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$ . Khi đó tích  $M.m$  là:

- A.  $M.m = 0$ .                      B.  $M.m = \frac{25}{4}$ .                      C.  $M.m = \frac{25}{8}$ .                      D.  $M.m = 2$ .

**Câu 9:** Gọi  $M$  và  $m$  tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$ .

Khi đó  $M - m$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B. 2.                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D. 1.

**Câu 10.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 + 9}{x}$  trên đoạn  $[1; 4]$ .

A.  $\max_{[1;4]} y = 11.$

B.  $\max_{[1;4]} y = \frac{25}{4}.$

C.  $\max_{[1;4]} y = 10.$

D.  $\max_{[1;4]} y = 6.$

**Câu 11.** Giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x$  là

A.  $M = 0.$

B.  $M = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

C.  $M = 3.$

D.  $M = \frac{-3\sqrt{3}}{2}.$

**Câu 12.** Trên đoạn  $[-2; 2]$ , hàm số  $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 1$  khi và chỉ khi

A.  $m = 2.$

B.  $m \geq 0.$

C.  $m = -2.$

D.  $m < 0.$

**Câu 13.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{\sqrt{1-x} - 2x^2}{\sqrt{x+1}}$ . Khi đó giá trị của  $M - m$  là:

A.  $-2.$

B.  $-1.$

C.  $1.$

D.  $2.$

**Câu 14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 - 4x + \frac{54}{x-2}$  trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

A.  $\min_{(2;+\infty)} y = 0.$

B.  $\min_{(2;+\infty)} y = -13.$

C.  $\min_{(2;+\infty)} y = 23.$

D.  $\min_{(2;+\infty)} y = -21.$

**Câu 15.** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \cos^2 x$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ?

A.  $1.$

B.  $2.$

C.  $3.$

D.  $4.$

**Câu 16.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$  bằng

A.  $\sqrt{2}.$

B.  $0.$

C.  $2.$

D.  $1.$

**Câu 17.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x^3 - 2x^2 + 7x - 1$  trên  $[-3; 2]$  là

A.  $3.$

B.  $-1.$

C.  $4.$

D.  $-13.$

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[1; 2]$  bằng  $-2$ . Khi đó giá trị  $m$  bằng

A.  $m = 3.$

B.  $m = 1.$

C.  $m = 4.$

D.  $m = 2.$

**Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị thực khác 0 của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 1$  trên đoạn  $[-2; 2]$ ?

A.  $m = -2.$

B.  $m < 0.$

C.  $m > 0.$

D.  $m = 2.$

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = |2x^2 - 3x - 1|$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$  là:

A.  $\frac{17}{8}$ .

B.  $\frac{9}{4}$ .

C. 2.

D. 3.

**Câu 21.** Hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m$  có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của  $m$  là:

A.  $m = 1; m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

B.  $m = -1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

C.  $m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

D.  $m = 1; m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 22.** Hàm số  $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$  có tập giá trị là

A.  $[-1; 1]$ .

B.  $[1; \sqrt{2}]$ .

C.  $[0; 1]$ .

D.  $[-1; \sqrt{2}]$ .

**Câu 23.** Hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$  giá trị lớn nhất trên đoạn  $[0; 3]$  là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

**Câu 24.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 2x - 4\sqrt{6 - x}$  trên đoạn  $[-3; 6]$ . Tổng  $M + m$  có giá trị là

A. 18.

B. -6.

C. -12.

D. -4.

**Câu 25.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$  trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng

A. -1.

B. 6.

C.  $\frac{23}{27}$ .

D. 1.

**Câu 26.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$ . Tính  $M + m$ .

A.  $M + m = 16$ .

B.  $M + m = 18$ .

C.  $M + m = \frac{12 + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{10}}{2}$ .

D.  $M + m = \frac{16 + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{10}}{2}$ .

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - mx + 4}{x - m}$  liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên  $[0; 4]$  tại một điểm  $x_0 \in (0; 4)$ .

A.  $-2 < m < 2$ .

B.  $-2 < m < 0$ .

C.  $m > 2$ .

D.  $0 < m < 2$ .

**Câu 28.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{5 - x^2} + 2x$  là

A.  $\sqrt{5}$ .

B. 5.

C.  $2\sqrt{5}$ .

D. 3.

**Câu 29.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2\cos x + \sin x + 3}{\cos x + 2\sin x + 3}$  lần lượt là

A. 2 và 1.

B. 1 và -1.

C. 3 và  $-\frac{1}{2}$ .D. 2 và  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 30.** Gọi  $M, n$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$  trên đoạn  $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $M + n = \frac{8}{3}$ .B.  $M + n = \frac{7}{2}$ .C.  $M + n = \frac{13}{6}$ .D.  $M + n = \frac{4}{3}$ .

**Câu 31.** Gọi  $M, n$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2+3}$  trên đoạn  $[0; 3]$ . Tính  $S = 2M + 3n$ .

A.  $S = 2$ .B.  $S = \frac{11}{6}$ .C.  $S = 3$ .D.  $S = \frac{5}{6}$ .

**Câu 32.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4\sin x + \sqrt{2}\cos 2x$  trên đoạn  $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

A.  $2\sqrt{2}$ .B.  $4\sqrt{2}$ .C.  $4 - \sqrt{2}$ .D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 33.** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi thỏa điều kiện  $y \leq 0, x^2 + x = y + 12$ . Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $M = xy + x + 2y + 17$  lần lượt bằng

A. 10; -6.

B. 5; -3.

C. 20; -12.

D. 8; -5.

**Câu 34.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$  là

A.  $\min P = -80$ .B.  $\min P = -91$ .C.  $\min P = -83$ .D.  $\min P = -63$ .

**Câu 35.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ . Khi đó, giá trị của  $M + m$  bằng

A. 44.

B. 41.

C. 43.

D. 42.

1.C	2.D	3.A	4.B	5.B	6.B	7.D	8.A	9.D	10.C
11.B	12.B	13.D	14.C	15.A	16.C	17.A	18.A	19.C	20.A
21.C	22.D	23.D	24.B	25.C	26.A	27.B	28.B	29.D	30.A
31.A	32.A	33.C	34.C	35.C					

## Tiệm Cận

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Tiệm cận đứng:

Hàm  $y = f(x)$  thỏa 1 trong các ĐK:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = x_0 \text{ được gọi là TCD}$$

#### 2. Tiệm cận ngang:

Hàm  $y = f(x)$  thỏa 1 trong các ĐK:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0 \text{ được gọi là TCN}$$

3. Tiệm cận xiên: Hàm  $y = f(x)$  thỏa 1 trong các ĐK:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ax + b$$

+ b được gọi là TCX

\*Cách xác định:  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$  hoặc  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

(Khi  $a = 0$  ta có tiệm cận ngang)

\*Chú ý: + Hàm đa thức bậc 3, bậc 4 không có tiệm cận; hàm hữu tỷ  $\frac{\text{bậc 1}}{\text{bậc 1}}$  chỉ có TCD

và TCN; hàm  $\frac{\text{bậc 2}}{\text{bậc 1}}$  chỉ có thể có TCD và TCX; ...

### II. Ứng dụng kĩ thuật Casio tìm giới hạn để tìm Tiệm cận

#### Ví dụ 1 : Trích đề mẫu minh họa lần 2 năm 2017

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ .

A.  $x = -3$ . và  $x = -2$ . B.  $x = -3$ . C.  $x = 3$ . và  $x = 2$ . D.  $x = 3$ .

#### Hướng dẫn :

Mẹo : tiệm cận đứng  $x = a$  thì tại giá trị đó thường làm cho mẫu không xác định và  $\lim_{x \rightarrow a} y = \infty$

Do đó ta CALC các đáp án xem có đáp án nào báo Error không

Đáp án A xét  $x = -3$

#### Bước 1 : Nhập biểu thức

$\left[ \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} \right]$

$\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

<p><b>Bước 1 : CACL các đáp án</b></p> <p>Đáp án A,B : <math>x = -3</math> nó ra 1 giá trị xác định nên loại A,B          Vậy chỉ còn C, D đúng xét giá trị <math>x = 2</math> xem sao</p> <p><b>CALC</b> <b>=</b> <b>3</b> <b>=</b> <b>CALC</b> <b>2</b> <b>=</b></p> <p>Nó báo error thì khả năng <math>x = 2</math> là TCD giờ chuyển sang bước 2</p>	<div style="text-align: right;">Math ▲</div> $\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} - \frac{1}{3}$ <p>Math ERROR</p> <p><b>[AC]</b> : Cancel  <b>[◀][▶]</b> : Goto</p>
<p><b>Bước 3 : Tính giới hạn</b></p> <p>Để tính giới hạn tại <math>x = 2</math> ta CALC tại <math>x = 1.999999</math></p> <p><b>◀</b> <b>CALC</b> <b>1</b> <b>◊</b> <b>9</b> <b>9</b> <b>9</b> <b>9</b> <b>9</b> <b>9</b> <b>=</b></p> <p>Nó không ra vô cùng nên <math>x = 2</math> sai vậy khoanh D</p>	<div style="text-align: right;">Math ▲</div> $\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -1.166665543$

**Ví dụ 2:** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1+\sin 5x}{\sqrt{x^2-9}-4}$

- A.**  $y = \pm 3$       **B.**  $y = 3$       **C.**  $y = -3$       **D.** không tồn tại

## Hướng dẫn

Chúng ta sẽ tính giá trị biểu thức tại  $x = \pm 10^6$  thay cho  $\pm \infty$

$\frac{3x+1+\sin(5x)}{\sqrt{x^2-9}-4}$	$\frac{3x+1+\sin(5x)}{\sqrt{x^2-9}-4}$
3.000012024	-3.000010024

**Vậy khoan A.**

**Ví dụ 3:** Hàm số  $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$  có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A.2**

## Hướng dẫn

**Kiểm tra xem  $x=1$  có là tiệm cận đứng không**

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$$

Vậy  $x=1$  là tiệm cận đứng

## Tiếp tục kiểm tra tiệm cận ngang

X?

Math ▲

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$$

Math ▲

1000000

2.0000025

Vậy  $y = 2$  là một tiệm cận đứng

X?

Math ▲

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$$

Math ▲

-1000000

0°0'0"

Ấn nút  $\left[ \frac{\square}{\square} \right]$  để nó hiện về độ như anh nhé, vậy  $y = 0$  là tiệm cận ngang

Kiểm tra tiệm cận xiên  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 

X?

Math ▲

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1} \div x$$

Math ▲

1000000000

0°0'0"

Vậy là không có tiệm cận xiên vì  $a = 0$  do đó khoanh B



### Bài tập rèn luyện

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = \frac{3x+1}{1-2x}$ . Khẳng định nào sau đây ĐÚNG?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x=1$ . B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y=-\frac{3}{2}$ .

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y=3$ . D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-2}$  có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất.

A.  $M(0;-1)$ . B.  $M(2;2)$ . C.  $M(1;-3)$ . D.  $M(4;3)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$  có đồ thị (C). Tìm tất cả giá trị của m để (C) không có tiệm cận đứng.

A.  $m=0$ . B.  $m=1$ . C.  $m=2$ . D.  $m=0$  hoặc  $m=1$ .

**Câu 4:** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ .

A.  $x=-3$  và  $x=-2$ . B.  $x=-3$ . C.  $x=3$  và  $x=2$ . D.  $x=3$ .

**Câu 5:** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$  có bao nhiêu tiệm cận ?

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

**Câu 6:** Số các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$  là:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 7:** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$  nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận thì giá trị  $a+b$  bằng:

A. -10. B. 2. C. 10. D. 15.

**Câu 8:** Xét các mệnh đề sau:

1. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2x-3}$  có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

2. Đồ thị hàm số  $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$  có hai đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

3. Đồ thị hàm số  $y = \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 1}$  có một đường tiệm cận ngang và hai đường tiệm cận đứng.

Số mệnh đề **ĐÚNG** là

- A. 3.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 0.

**Câu 9.** Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{\sqrt{2x + 1} - x}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận (gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A. 1.                      B. 4.                      C. 3.                      D. 2.

**Câu 10.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$  là

- A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 11.** Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  là:

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 12.** Các giá trị của tham số  $a$  để đồ thị hàm số  $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$  có tiệm cận ngang là:

- A.  $a = \pm 2$ .                      B.  $a = -2$  và  $a = \frac{1}{2}$ .                      C.  $a = \pm 1$ .                      D.  $a = \pm \frac{1}{2}$ .

**Câu 13.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x} - m}{x - 1}$  có đúng hai đường tiệm cận.

- A.  $(-\infty; +\infty) \setminus \{1\}$ .                      B.  $(-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$ .                      C.  $(-\infty; +\infty)$ .                      D.  $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$ .

**Câu 14.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x - 2}$ ?

- A. 1.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 3.

**Câu 15.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$  là:

- A. 3.                      B. 1.                      C. 0.                      D. 2.

**Câu 16.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y=1$ .

- A.  $m=2$ .                      B.  $m=\frac{5}{2}$ .                      C.  $m=0$ .                      D.  $m=1$ .

**Câu 17.** Tập hợp các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$  có đúng 1 đường tiệm cận là

- A.  $\{0\}$ .    B.  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .    C.  $\emptyset$                       D.  $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus -1$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây sai?

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$y'$		-	-	0	+
$y$	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y=-1$ .    B. Hàm số đạt cực trị tại điểm  $x=2$ .  
 C. Hàm số không có đạo hàm tại điểm  $x=-1$ .    D. Đths có tiệm cận đứng là  $x=-1$ .

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$  có đồ thị  $(C)$  ( $a, b$  là các hằng số dương,  $ab=4$ ). Biết rằng  $(C)$  có tiệm cận ngang  $y=c$  và có đúng 1 tiệm cận đứng. Tính tổng  $T=3a+b-24c$

- A.  $T=1$ .                      B.  $T=4$ .                      C.  $T=7$ .                      D.  $T=11$ .

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = \frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $m$  là số tiệm cận của  $(C)$  và  $n$  là giá trị của hàm số tại  $x=1$  thì tích  $m.n$  là

- A.  $\frac{14}{5}$ .                      B.  $\frac{2}{15}$ .                      C.  $\frac{3}{5}$ .                      D.  $\frac{6}{5}$ .

**Câu 21.** Cho đường cong  $(C): y = \frac{2x+3}{x-1}$  và  $M$  là một điểm nằm trên  $(C)$ . Giả sử  $d_1, d_2$  tương ứng là các khoảng cách từ  $M$  đến hai tiệm cận của  $(C)$ , khi đó tích  $d_1.d_2$  bằng

- A. 6.                      B. 3.                      C. 5.                      D. 4.

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $a$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + a}{x^3 + ax^2}$  có 3 đường tiệm cận.

- A.  $a \neq 0, a \neq \pm 1$ .    B.  $a \neq 0, a \neq -1$ .    C.  $a < 0, a \neq -1$ .    D.  $a > 0$ .

**Câu 23.** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 16} + 2 - x}{x^2 - 3x - 10}$ .

- A.  $y = -2; y = 5$ .    B.  $x = -2$ .    C.  $x = -2; x = 5$ .    D.  $x = 2, x = -5$ .

1.B	2.D	3.D	4.D	5.C	6.D	7.D	8.C	9.D	10.B
11.C	12.A	13.A	14.D	15.A	16.D	17.A	18.A	19.D	20.D
21.C	22.B	23.C							

## Tiếp Tuyến

**Dạng I: Viết phương trình tiếp tuyến tại 1 điểm:**

**Ví dụ 1:** Viết phương trình tiếp tuyến của  $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$  tại  $x = 1$

Ta đã biết phương trình tiếp tuyến có dạng :  $y = ax + b$

$$a = y'(x_0) = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 2x + 1) = 1 \quad \text{còn } b = y(x_0) - ax_0$$

Các bạn bấm máy như sau :

SHIFT ∫<sup>dx</sup> ALPHA ) SHIFT x<sup>2</sup> - 2 ALPHA ) x<sup>2</sup> + 2 ALPHA ) + 1 ► 1 =

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 2x + 1) = 1$$

AC ( ALPHA ) SHIFT x<sup>2</sup> - 2 ALPHA ) x<sup>2</sup> + 2 ALPHA ) + 1 ) - 1 × ALPHA )  
CALC 1 =

$$(x^3 - 2x^2 + 2x + 1) - 1 = 1$$

$$\Rightarrow y = x + 1$$

**Dạng II: Viết phương trình tiếp tuyến đi qua 1 điểm:**

**Ví dụ 1:** Viết phương trình tiếp tuyến của  $y = x^3 - 3x + 1$  đi qua  $M(1; -1)$

Giả sử tiếp điểm là  $A(x_0; y_0)$

Ta giải hệ tìm tọa độ tiếp điểm

$$\begin{cases} k = y'(x_0) \\ y_0 = k(x_0 - 1) - 1 \Rightarrow x_0^3 - 3x_0 + 1 = (3x_0^2 - 3)(x_0 - 1) - 1 \xrightarrow{\text{SOLVE}} \begin{cases} x = 1 \\ x = -0.5 \end{cases} \\ y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 1 \end{cases}$$

Vậy là quay lại bài toán tìm tiếp tuyến tại 1 điểm.

Để giải phương trình này  $x_0^3 - 3x_0 + 1 = (3x_0^2 - 3)(x_0 - 1) - 1$  các em nhập vào máy như sau:

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-}$   
 $\boxed{1} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{=}$   

$$X^3 - 3X + 1 - ((3X^2 - 3)(X - 1) - 1)$$

Sau đó bấm  $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$

$$X^3 - 3X + 1 - ((3X^2 - 3)(X - 1) - 1)$$
  

$$X = 1$$
  

$$L - R = 0$$

Được 1 nghiệm thì sửa thành  $PT: (x-1)$

$\boxed{\leftarrow} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{(} \boxed{\leftarrow} \boxed{\leftarrow} \boxed{\div} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$   

$$\text{Can't Solve}$$
  

$$\boxed{\text{[AC]}} : \text{Cancel}$$
  

$$\boxed{\text{[F4]}} \boxed{\text{[F5]}} : \text{Goto}$$

Các em edit thành  $PT: (x-1)^2$  rồi  $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$

$$(X^3 - 3X + 1 - ((3X^2 - 3)(X - 1)^2 - 1))$$
  

$$X = -0.5$$
  

$$L - R = 0$$

**Bài tập rèn luyện**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x^3 - x - 1$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung là

- A.  $y = 2x + 2$ .      B.  $y = -x + 1$ .      C.  $y = -x - 1$ .      D.  $y = 2x - 1$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  ( $C$ ). Đường thẳng đi qua điểm  $A(-1; 1)$  và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của  $(C)$  là:

- A.  $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$ .      B.  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .      C.  $y = x + 3$ .      D.  $x - 2y - 3 = 0$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $(C): y = x^4 - 8x^2 + 7$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $d: y = 60x + m$  tiếp xúc với  $(C)$ .

- A.  $m = -164$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = -60$ .      D. Đáp án khác.

**Câu 4.** Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  tại điểm có hoành độ  $x = 1$

- A.  $y = -3x + 3$ .      B.  $y = -3x - 3$ .      C.  $y = -x - 1$ .      D.  $y = -x + 1$ .

**Câu 5.** Tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x^2 - m = 0$  có 3 nghiệm phân biệt là:

- A.  $m \leq 0$ . B.  $m \geq 4$ .      C.  $0 < m < 4$ .      D.  $-4 < m < 0$

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Biết đồ thị  $(C)$  cắt  $Ox$ ,  $Oy$  lần lượt tại  $A$ ,  $B$ . Tìm  $M$  thuộc  $(C)$  sao cho diện tích tam giác  $MAB$  bằng 3.

- A.  $M\left(2; \frac{1}{3}\right)$ . B.  $M\left(3; \frac{1}{2}\right)$ ,  $M\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$ . C.  $M(-2; 3)$ ,  $M(-3; 2)$ . D.  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x^3 - m^2x^2 - m$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$  song song với đường thẳng  $(C)d: y = -5x$ .

- A.  $m = 2$       B.  $m = -2$       C.  $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$ .      D. Không có giá trị của  $m$ .

**Câu 8.** Với giá trị nào của  $m$  thì đường thẳng  $y = 8x + m$  là tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

- A.  $m = 8$ .      B.  $m = -8$ .      C.  $m = 18$ .      D.  $m = -18$ .

**Câu 9.** Cho  $(C_m): y = \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + 1$ . Gọi  $A$  là điểm trên  $(C_m)$  có hoành độ là  $-1$ . Tìm  $m$  để tiếp tuyến với  $(C_m)$  tại  $A$  song song với đường thẳng  $d: y = 5x + 2016$ .

- A.  $m = 4$ . B.  $m = -5$ . C.  $m = -4$ . D.  $m = -1$ .

**Câu 10.** Tìm  $m$  để trên đường cong  $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 6(m-1)x + \frac{2}{3}$  có hai điểm phân biệt  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  sao cho tiếp tuyến tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng  $x + 3y - 6 = 0$  và  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 2\sqrt{3}$ .

- A.  $\frac{3}{2} \leq m < 3$ . B.  $m \geq \frac{3}{2}$ . C.  $m < \frac{3}{2}$  hoặc  $m \geq 3$ . D.  $\frac{3}{2} \leq m \leq 3$ .

1C	2B	3A	4A	5D	6C	7B	8A	9A	10A
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----



### Tương giao

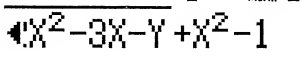
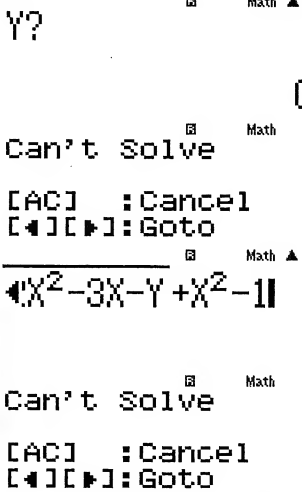
**Ví dụ 1:** Tìm  $m$  để phương trình  $\sqrt{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x - m} + x^2 - 1 = 0$  có nghiệm thực.

A.  $m \leq 0$

B.  $m \geq -2$

C.  $-2 \leq m \leq 0$  D.  $m \geq 0$

Hướng dẫn

<p><b>Bước 1 :</b> Nhập phương trình vào máy</p> <p>Đổi <math>m = Y</math></p>	
<p><b>Bước 2:</b> Các em chọn 1 giá trị đại diện ở từng đáp án, ví dụ muốn kiểm tra xem A có khả năng đúng không thì lấy <math>m = -100</math></p> <p>Các em nhập vào máy tính thay <math>m</math> bằng <math>Y</math> nhé</p> <p><b>[SHIFT] [CALC]</b></p> <p><b>[=] [1] [0] [0] [=] [=]</b></p> <p>Vậy loại A, tương tự xét B</p> <p><b>[←]</b></p> <p><b>[SHIFT] [CALC] [1] [0] [0] [=] [=]</b></p> <p>Vậy Loại B và D, cuối cùng chọn C</p>	
<p><b>Bước 3 :</b> Khoanh đáp án</p>	

**Ví dụ 2:** Tìm đầy đủ các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 2(1-m)x + 16 + 2m = 0 \text{ có nghiệm nằm trong đoạn } [2; 4] ?$$

A.  $m \geq \frac{11}{2}$

B.  $\frac{20}{3} \leq m \leq 8$

C.  $m \leq 8$

D.  $\frac{11}{2} \leq m \leq 8$

Hướng dẫn

**\*Cách 1:** Dựa theo hướng tư duy tự luận cô lập  $m$  xét hàm

$$x^3 - 3x^2 + 2(1-m)x + 16 + 2m = 0 \Rightarrow m(2x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x + 16$$

$$x \in [2, 4] \rightarrow 2x-2 > 0 \rightarrow m = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 16}{2x-2} \rightarrow \min_{f(x)} \leq m \leq \max_{f(x)}$$

Các em dùng Table để tìm nhanh: Start 2=, End 4=, Step 0.1=

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2x - 2}$$

Vậy chọn D

**\*Cách 2:** sử dụng tính năng giải phương trình bậc 3 của máy tính

MODE 5 4

Chọn giá trị đặc trưng của từng đáp án, ví dụ A là  $m=100$  được 3 nghiệm

$$\begin{array}{ccc} X_1 = & X_2 = & X_3 = \\ -13.21708151 & 15.13747701 & 1.0796045 \end{array}$$

Vậy loại A do  $m=100$  không có nghiệm nào thuộc

Tiếp tục xét C với  $m=-100$

$$\begin{array}{ccc} X_1 = & X_2 = & X_3 = \\ 1 & 1+14.10673598i & 1-14.10673598i \end{array}$$

Vậy loại C do  $m=-100$  không có nghiệm nào thuộc

Tương tự xem B và D khác nhau ở giá trị  $m=6$  thuộc D không thuộc B

$$\begin{array}{ccc} X_1 = & X_2 = & X_3 = \\ -3.110092071 & 3.629813272 & 2.480278799 \end{array}$$

Vậy  $m=6$  thỏa mãn nên chọn D

**Ví dụ 3:[Trích đề thử nghiệm 2017]** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $6^x + (3-m)2^x - m = 0$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0;1)$ .


- A.  $[3;4]$ .                      B.  $[2;4]$ .                      C.  $(2;4)$ .                      D.  $(3;4)$ .

Hướng dẫn:

Các em có thể dùng cách cô lập m rồi xét max, min như bài trên nhưng ở ví dụ này anh sẽ hướng dẫn cách số 2 dựa vào 1 định lí SGK lớp 11


Cách 2: dựa vào định lí sách giáo khoa lớp 11:  $f(a)f(b) \leq 0 \rightarrow \exists c \in [a, b]$  để  $f(c) = 0$

Xét đáp án A,B: m=4, start 0=, end 1=, step 0,1=

$$f(x) = 6^x - 2^x - 4$$


Loại do toàn bộ khoảng (0;1) hàm âm

Xét đáp án C,D : m=2.1

$$f(x) = 49 \times 2^x - 2.1$$


Các em để ý có khúc chuyển từ âm sang dương (hoặc ngược lại) là có nghiệm vậy chọn C loại D

### Bài tập rèn luyện

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có đồ thị (C). Tìm tất cả giá trị của  $m$  để đường thẳng

$d: y = x + m - 1$  cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho  $AB = 2\sqrt{3}$ .

- A.  $m = 4 \pm \sqrt{3}$ .      B.  $m = 4 \pm \sqrt{10}$ .      C.  $m = 2 \pm \sqrt{3}$ .      D.  $m = 2 \pm \sqrt{10}$ .

**Câu 2.** Đồ thị hình bên là của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ . Tìm

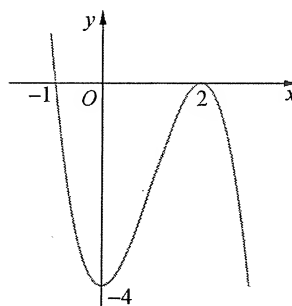
tất cả giá trị của  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x^2 + m = 0$  có hai nghiệm phân biệt? Chọn một khẳng định ĐÚNG.

A.  $m = 4$  hoặc  $m = 0$ .

B.  $m = 4$ .

C.  $0 < m < 4$ .

D.  $m = 0$ .



**Câu 3.** Đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  và đồ thị của hàm số  $y = -x^2 + 4$  có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$y'$		-		+	0	-	
$y$	$+\infty$		$-1$		$2$		$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho phương trình  $f(x) = m$  có ba nghiệm thực phân biệt.

A.  $[-1; 2]$ .

B.  $(-1; 2)$ .

C.  $(-1; 2]$ .

D.  $(-\infty; 2]$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $A(3; 20)$  và có hệ số góc  $m$ . Giá trị của  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt  $(C)$  tại 3 điểm phân biệt

- A.  $m < \frac{15}{4}, m \neq 24$ .    B.  $m \geq \frac{15}{4}$ .    C.  $m > \frac{15}{4}, m \neq 24$ .    D.  $m < \frac{15}{4}$ .

**Câu 6.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x^3 - 3x - m = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

- A.  $-2 < m < 2$ .    B.  $-1 < m < 3$ .    C.  $m < -2$ .    D.  $-2 \leq m < 2$

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là giao điểm của  $(C)$  và trục hoành. Số điểm  $M \in (C)$  sao cho  $\angle AMB = 90^\circ$  là:

- A. 1.    B. 2.    C. 0.    D. 3.

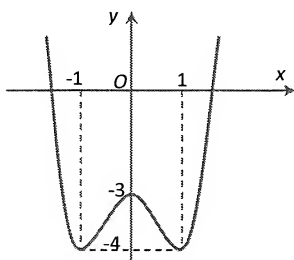
**Câu 8.** Cho đồ thị  $(C): y = \frac{2x+1}{2x-m}$  và  $A(-2; 3), C(4; 1)$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $d: y = 3x - 1$  cắt đồ thị  $(C)$  tại 2 điểm phân biệt  $B, D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình thoi.

- A.  $m = \frac{8}{3}$ .    B.  $m = 1$ .    C.  $m = 2$ .    D.  $m = 0$  hoặc  $m = -1$ .

**Câu 9.** Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị hàm số:  $y = x^4 - 2x^2 + m$  cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

- A.  $m = 0$ .    B.  $m > 1$  hoặc  $m < 0$ .    C.  $m < 1$ .    D.  $0 < m < 1$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m - 2$  có bốn nghiệm phân biệt.



- A.  $-3 < m < -2$ .    B.  $-4 < m < -3$ .    C.  $-3 \leq m \leq -2$ .    D.  $-4 \leq m \leq -3$ .

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$  cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ bằng 10.

- A.  $m = -1 + \sqrt{5}$ .      B.  $m = 3$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = 4$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ . Số nghiệm của phương trình  $f(f(x)) = 0$  là?

- A. 6.      B. 7.      C. 9.      D. 3.

**Câu 13.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} = \sqrt{m+x-x^2}$  có hai nghiệm phân biệt.

- A.  $m \in \left[5; \frac{23}{4}\right]$ .      B.  $m \in [5; 6]$ .      C.  $m \in \left(5; \frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$ .      D.  $m \in \left[5; \frac{23}{4}\right) \cup \{6\}$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

$x$	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	+	0	-
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
		1			-15	

Tìm  $m$  để phương trình  $f(x) + m = 0$  có nhiều nghiệm thực nhất.

- A.  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 15 \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} m > 1 \\ m < -15 \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 15 \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -15 \end{cases}$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như bên. Phương trình  $f(x) = m$  có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A.  $m \geq 1$  hoặc  $m = -2$ .      B.  $m > 1$ .

C.  $m > -2$ .      D.  $m \geq -2$ .

$x$	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		-2		1
				$-\infty$

**Câu 16.** Biết rằng hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 3$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-1	3	-1	$+\infty$

Tìm  $m$  để phương trình  $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$  có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

- A.  $1 < m < 3$ . B.  $m > 3$ . C.  $m = 0$ . D.  $m \in (1; 3) \cup \{0\}$ .

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 4x + m = 2\sqrt{5 + 4x - x^2} + 5$  có nghiệm.

- A.  $-1 \leq m \leq 2\sqrt{3}$ . B.  $0 \leq m \leq 15$ . C.  $m \geq -1$ . D.  $m \geq 0$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = \frac{3x - 2m}{mx + 1}$ , với  $m$  là tham số. Biết rằng đồ thị hàm số cắt đường thẳng  $d: y = 3x - 3m$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  và cắt các trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $C, D$ . Giá trị của  $m$  để diện tích tam giác  $OAB$  bằng 2 lần diện tích tam giác  $OCD$  là

- A.  $m = \pm \frac{2}{3}$ . B.  $m = \frac{2}{3}$ . C.  $m = -\frac{2}{3}$ . D.  $m = \pm \frac{3}{2}$ .

**Câu 19.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$ . Số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$  và trục  $Ox$  là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 20.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2m$  có nghiệm

- A.  $\sqrt{2} \leq m \leq 2$ . B.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$ . C.  $-\sqrt{2} \leq m \leq 2$ . D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$ .

**Câu 21.** Khi phương trình  $|\sin x - \cos x| + \sin 2x = m$  có nghiệm thực khi và chỉ khi

- A.  $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$ . B.  $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ . C.  $1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ . D.  $m = 1$  hoặc  $m = \frac{5}{4}$ .

**Câu 22.** Phương trình  $x^3 + x(x+1) = m(x^2 + 1)^2$  có nghiệm thực khi và chỉ khi

- A.  $-6 \leq m \leq -\frac{3}{2}$ . B.  $-1 \leq m \leq 3$ . C.  $m \geq 3$ . D.  $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; -2]$  và  $[2; +\infty)$ , có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp các giá trị của  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có hai nghiệm phân biệt.

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$5/2$	$+\infty$
$f'(x)$		-		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$22$	$2$	$7/4$	$+\infty$

A.  $\left[\frac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$ . B.  $[22; +\infty)$ . C.  $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ . D.  $\left(\frac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$ .

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = \frac{x+3}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Đường thẳng  $d: y = 2x + m$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M$  và  $N$  sao cho  $MN$  nhỏ nhất khi

A.  $m = 1$ . B.  $m = 3$ . C.  $m = 2$ . D.  $m = -1$ .

**Câu 25.** Đường thẳng  $d: y = x + 4$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$  tại 3 điểm phân biệt  $A(0; 4)$ ,  $B$  và  $C$  sao cho diện tích tam giác  $MBC$  bằng 4, với  $M(1; 3)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A.  $m = 2$  hoặc  $m = 3$ . B.  $m = -2$  hoặc  $m = 3$ . C.  $m = 3$ . D.  $m = -2$  hoặc  $m = -3$ .

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $m\sqrt{2 + \tan^2 x} = m + \tan x$  có ít nhất một nghiệm thực.

A.  $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ . B.  $-1 < m < 1$ . C.  $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ . D.  $-1 < m < 1$ .

### Bảng Đáp Án

1.B	2.A	3.D	4.B	5.C	6.A	7.B	8.A	9.D	10.A
11.D	12.B	13.B	14.C	15.A	16.D	17.B	18.A	19.D	20.B
21.B	22.D	23.D	24.B	25.C	26.C				



### Hàm Số Mũ – Logarit

Về cơ bản thì các em cũng làm như những gì được hướng dẫn ở chương hàm số, phần này chủ yếu các em tự thực hành và ôn lại các kĩ năng

#### Dạng 1: Tập xác định

**Ví dụ 1:** Tập xác định của hàm số  $y = (1-x)^{-2} + \log x$  là:

A.  $(0; +\infty)$

B.  $(-\infty; 1)$

C.  $(0; 1) \cup (1; +\infty)$

D.  $(0; 1)$

Hướng dẫn

Cũng giống như ở các phần trước, để cho nhanh chúng ta sẽ dựa vào các đáp án bằng tìm ra sự khác biệt rồi CALC

<b>Bước 1: Nhập biểu thức</b> $(1-x)^{-2} + \log(x)$	$(1-X)^{-2} + \log(X)$
<b>Bước 2: CALC các đáp án</b> Đáp án A, C chọn $x=100$ $\text{CALC } 1 \ 0 \ 0 \ =$ Vậy A, C thỏa mãn lại tìm sự khác biệt 2 đáp án này ở giá trị $x=1$ $\text{CALC } 1 \ =$ Vậy loại A do chứa giá trị này	$(1-X)^{-2} + \log(X)$ $2.00010203$ Math ERROR [AC] : Cancel [◀][▶]: Goto
<b>Bước 3: Khoanh đáp án đúng</b>	

#### Dạng 2: Đạo hàm mũ – logarit

**Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số sau:  $f(x) = x^x$

A.  $f'(x) = x^{x-1}(x + \ln x)$

B.  $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

C.  $f'(x) = x^x$

D.  $f'(x) = x \ln x$

Hướng dẫn

**\*Tự luận :**  $y = x^x \rightarrow \ln y = x \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \rightarrow y' = x^x(1 + \ln x)$

**\* Casio :** không phụ thuộc bài dễ hay khó

<b>Bước 1: Nhập biểu thức tính đạo hàm tại một giá trị làm hàm xác định</b> $\text{[SHIFT] [f']} \text{[ALPHA] [x]} \text{[ALPHA] [)]} \text{[>]} \text{[>]} \text{[2]}$	$\frac{d}{dx}(x^x) _{x=2}$
<b>Bước 2: Xét hiệu các đáp án</b> <b>Đáp án A</b> $\text{[>]} \text{[-]} \text{[2]} \text{[x]} \text{[2]} \text{[-]} \text{[1]} \text{[>]} \text{[(]} \text{[2]} \text{[+]} \text{[ln]} \text{[2]} \text{[)]} \text{[)]} \text{[=]}$	$\leftarrow -2^{2-1}(2+\ln(2))$
<b>Bước 3: Chọn đáp án đúng</b> <b>*Lưu ý:</b> nhiều trường hợp kết quả chỉ xấp xỉ 0 nên các em bấm $\text{[0.999]}$ Để kiểm tra nhé.	$\frac{d}{dx}(x^x) _{x=2} - 2^2(1)$ <p style="text-align: right;">0</p>

**Ví dụ 2: [Logarit + Lượng giác]** Đạo hàm của hàm số  $f(x) = \sin 2x \cdot \ln^2(1-x)$  là:

- A.  $f'(x) = 2\cos 2x \cdot \ln^2(1-x) - \frac{2\sin 2x \cdot \ln(1-x)}{1-x}$       B.  $f'(x) = 2\cos 2x \cdot \ln^2(1-x) - \frac{2\sin 2x}{1-x}$   
 C.  $f'(x) = 2\cos 2x \cdot \ln^2(1-x) - 2\sin 2x \cdot \ln(1-x)$       D.  $f'(x) = 2\cos 2x + 2\ln(1-x)$

### Hướng dẫn:

Về cơ bản các em cũng làm tương tự nhưng lưu ý là phải để đơn vị góc ở Radian :

$\text{[SHIFT] [MODE] [4]}$

Cách nhập  $\ln^2(1-x)$  là  $\text{[ln]} \text{[1]} \text{[-]} \text{[ALPHA] [)]} \text{[)]} \text{[x^2]}$

$\ln(1-x)^2$

### Dạng 3: Max-Min

**Ví dụ 1[Đề Thử Nghiệm 2017]:** Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > b > 1$ . Tìm giá trị nhỏ

nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \log_a^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$

- A.  $P_{\min} = 19$       B.  $P_{\min} = 13$       C.  $P_{\min} = 14$       D.  $P_{\min} = 15$

### Hướng dẫn

**\*Tự luận :**

$$P = \log_a^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2}{\log_a \frac{a}{b}}\right)^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4}{(1-\log_a b)^2} + 3(\log_b a - 1)$$

Đặt  $t = \log_a b < 1$  do  $a > b > 1$ . Khảo sát hàm  $f(t) = \frac{4}{(1-t)^2} + 3\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ ,  $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Các em tự đạo hàm, giải  $f'(x) = 0$  rồi lập bảng biến thiên, khá là lâu (anh dùng luôn casio)

\*Casio :

Cách 1: Dùng CACL cho tiện ở hệ Comp

Nhập biểu thức vào máy tính

Theo điều kiện  $a > b > 1$  nên ban đầu chọn  $a=1.2, b=1.1$

Tiếp theo giữ nguyên B, thay đổi A tăng lên  $1.3 \rightarrow 1.4 \rightarrow 1.5$

Dựa vào đây ta thấy đồ thị có dạng phễu nên  $Min \approx 15$  các em Calc một vài giá trị nữa xung quanh

$a=1.3 \rightarrow 1.4$  cho chắc

$$\log_{\frac{A}{B}}(A^x)^{\frac{1}{x}} + 3 \log_{\frac{A}{B}} B$$

$$15.03566838$$

Vậy không còn nghi ngờ gì nữa ^^

Cách 2: Table : thay  $b=1.1$  hoặc lưu 1.1 vào b, thay  $a=X$  cho a thay đổi, start 1.2=, end 4=, step 0.1=

$$f(X) = \frac{X}{1.1} (X^2)^{\frac{1}{2}}$$

X	f(X)
1.2	20.301
1.3	17.712
1.4	15.377

$$15.12454284$$

**Bài tập rèn luyện**

**Câu 1.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \log_2(x^2 - x - 6)$

- A.  $[-2; 3]$ . B.  $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ . C.  $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ . D.  $(-2; 3)$ .

**Câu 2.** Cho hai số thực  $a, b$  với  $1 < a < b$ . Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A.  $\log_{2016} 2017 < 1$  B.  $\left(\frac{2017}{2016}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ . C.  $\left(\frac{2016}{2017}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ . D.  $\log_{2017} 2016 < 1$ .

**Câu 3.** Biết  $\log_a b = 2, \log_a c = 3; a, b, c > 0; a \neq 1$ . Khi đó giá trị của  $\log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c}\right)$  bằng

- A.  $-\frac{1}{3}$ . B. 5. C. 6. D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x) = x \ln x$ . Đạo hàm cấp hai  $f''(e)$  bằng:

- A. 2. B.  $\frac{1}{e}$ . C. 3. D.  $e$ .

**Câu 5.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{e^4 - e^x}}$  là:

- A.  $(-\infty; 4]$ . B.  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ . C.  $(-\infty; 4)$ . D.  $(-\infty; \ln 4)$ .

**Câu 6.** Đạo hàm của hàm số  $y = (2x^2 - 5x + 2)e^x$  là:

- A.  $xe^x$ . B.  $(2x^2 - x - 3)e^x$ . C.  $2x^2 e^x$ . D.  $(4x - 5)e^x$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x) = 3^{x^2} \cdot 4^x$ . Khẳng định nào sau đây là sai

- A.  $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 2 > 2$ . B.  $f(x) > 9 \Leftrightarrow 2x \log 3 + x \log 4 > \log 9$ .  
C.  $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \log_2 3 + 2x > 2 \log_2 3$ . D.  $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \ln 3 + x \ln 4 > 2 \ln 3$ .

**Câu 8.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = e^x \sin 2x$ .

- A.  $e^x (\sin 2x - \cos 2x)$ . B.  $e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$ . C.  $e^x (\sin 2x + \cos 2x)$ . D.  $e^x \cos 2x$ .

**Câu 9.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 3^{6x+1}$ .

- A.  $y' = 3^{6x+2} \cdot 2$ . B.  $y' = (6x+1) \cdot 3^{6x}$ . C.  $y' = 3^{6x+2} \cdot 2 \ln 3$ . D.  $y' = 3^{6x+1} \cdot \ln 3$ .

**Câu 10.** Hàm số  $y = \ln \left| \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right|$  có  $y'$  bằng

A.  $\frac{2}{\cos 2x}$ .

B.  $\frac{2}{\sin 2x}$ .

C.  $\cos 2x$ .

D.  $\sin 2x$ .

Câu 11. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$  có tập xác định  $\mathbb{R}$ ?

A.  $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

B.  $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

C.  $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ .

D.  $\left[\frac{2}{3}; 10\right]$ .

Câu 12. Cho hàm số  $f(x) = \ln(4x - x^2)$ . Chọn khẳng định đúng.

A.  $f'(3) = -1,5$ .

B.  $f'(2) = 0$ .

C.  $f'(5) = 1,2$ .

D.  $f'(-1) = -1,2$ .

Câu 13. Cho hàm số  $y = x^2 e^x$ . Nghiệm của bất phương trình  $y' < 0$  là:

A.  $x \in (0; 2)$ .

B.  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

C.  $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .

D.  $x \in (-2; 0)$ .

Câu 14. Hàm số  $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$  khi

A.  $m > \frac{1}{4}$ .

B.  $m > 0$ .

C.  $m \geq \frac{1}{4}$ .

D.  $m < \frac{1}{4}$ .

Câu 15. Hàm số  $y = e^{x^2 - 4x + 4}$  đồng biến trên những khoảng nào sau đây?

A.  $\mathbb{R}$ .

B.  $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ .

C.  $(2; +\infty)$ .

D.  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  trên đoạn  $[1; e^3]$

A.  $\frac{4}{e^2}$ .

B.  $\frac{8}{e^3}$ .

C. 0.

D.  $x = 1$ .

Câu 17. Cho hàm số  $y = \log_{x^2} 4$ . Tính  $y'(2)$

A.  $\log_2 4$ .

B.  $\frac{1}{\ln 4}$ .

C.  $-\frac{1}{\ln 2}$ .

D.  $-\frac{1}{\ln 4}$ .

Câu 18. Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\log(9-x)}$  là

A.  $[-5; 9]$ .

B.  $(-5; 9) \setminus \{8\}$ .

C.  $[-5; 9) \setminus \{1\}$ .

D.  $[-5; 9) \setminus \{3\}$ .

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{e^x}{x+1}$ .

A.  $y' = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$ .      B.  $y' = \frac{x \cdot e^x}{x+1}$ .      C.  $y' = \frac{x+e^x}{(x+1)^2}$ .      D.  $y' = \frac{x-e^x}{(x+1)^2}$ .

**Câu 20.** Đạo hàm của hàm số  $y = \ln \frac{x+1}{x-2}$  là

A.  $\frac{x-2}{(x+1) \ln \left( \frac{x+1}{x-2} \right)}$ .      B.  $\frac{x-2}{x+1}$ .      C.  $\frac{-3}{x^2-x-2}$ .      D.  $\frac{x+1}{(x-2)^2}$ .

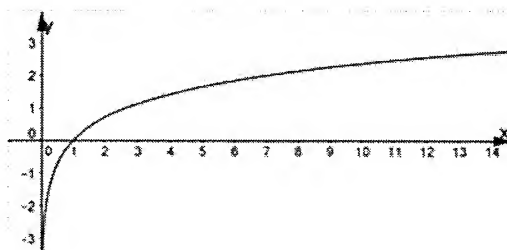
**Câu 21.** Tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \log \frac{x-3}{x+1}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .      B.  $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ .  
C.  $D = [3; +\infty)$ .      D.  $D = (-1; 3)$ .

**Câu 22.** Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên ?

A.  $y = \log_{0,5} x$ .      B.  $y = \log_{\sqrt{e}} x$ .

C.  $y = e^x$ .      D.  $y = e^{-x}$ .

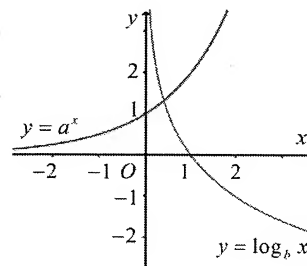


**Câu 23.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2xe^x - 2x - x^2$  trên đoạn  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$  là

A.  $\begin{cases} \max y = 4e+8 \\ \min y = 0 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} \max y = 0 \\ \min y = -\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{5}{4} \end{cases}$       C.  $\begin{cases} \max y = 4e^2+8 \\ \min y = 0 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} \max y = 4e^2-8 \\ \min y = 0 \end{cases}$ .

**Câu 24.** Cho  $a > 0, b > 0, b \neq 1$ . Đồ thị các hàm số  $y = a^x$  và  $y = \log_b x$  được cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $a > 1; 0 < b < 1$ .      B.  $1 > a > 0; b > 1$ .  
C.  $0 < a < 1; 0 < b < 1$ .      D.  $a > 1; b > 1$ .



**Câu 25.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \ln(2x^2 + e^2)$  trên  $[0; e]$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M + m = 5$ .      B.  $M + m = 4 + \ln 3$ .  
C.  $M + m = 4 + \ln 2$ .      D.  $M + m = 2 + \ln 3$ .

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = x^x$ . Tính  $y''(1)$ .

- A.  $y''(1) = \ln^2 \pi$ .      B.  $y''(1) = \pi \ln \pi$ .      C.  $y''(1) = 0$ .      D.  $y''(1) = \pi(\pi - 1)$ .

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \ln(16x^2 + 1) - (m+1)x + m + 2$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; \infty)$ .

- A.  $m \in (-\infty; -3]$ .      B.  $m \in [3; +\infty)$ .      C.  $m \in (-\infty; -3)$ .      D.  $m \in [-3; 3]$ .

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = \sqrt{x^2 + 3} - x \ln x$ . Gọi  $M; N$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[1; 2]$ . Khi đó tích  $M.N$  là:

- A.  $2\sqrt{7} + 4 \ln 5$ .      B.  $2\sqrt{7} - 4 \ln 2$ .      C.  $2\sqrt{7} - 4 \ln 5$ .      D.  $2\sqrt{7} + 4 \ln 2$ .

**Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- A.  $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ .      B.  $m \in [1; +\infty)$ .      C.  $m \in (-4; 1)$       D.  $m \in (1; +\infty)$ .

**Câu 30.** Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > b > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \log_a^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right)$ .

- A.  $P_{\min} = 19$ .      B.  $P_{\min} = 13$ .      C.  $P_{\min} = 14$ .      D.  $P_{\min} = 15$ .

**Câu 31.** Giá trị của  $M = a^{2016 \log_{a^2} 2017}$  ( $0 < a \neq 1$ ) bằng

- A.  $1008^{2017}$ .      B.  $2017^{2016}$ .      C.  $2016^{2017}$ .      D.  $2017^{1008}$ .

**Câu 32.** Trong các nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn bất phương trình  $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = 2x + y$  bằng:

- A.  $\frac{9}{4}$ .      B.  $\frac{9}{2}$ .      C.  $\frac{9}{8}$ .      D. 9.



**Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

- A.  $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$       B.  $m \in (-1; 1)$       C.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$       D.  $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

**Câu 34.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}$  và hàm số  $g(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $f(2^{2017}) < g(2^{2017})$ .      B.  $f(2^{2017}) > g(2^{2017})$ .  
C.  $f(2^{2017}) = 2g(2^{2017})$ .      D.  $f(2^{2017}) = g(2^{2017})$ .

**Câu 35.** Xét các số thực  $x, y$  thỏa  $x > 1, y > 1$  và  $\frac{1}{\log_x 3} + \log_{xy} 81 = 4 - \log_3 y$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $F = x^2 + 6y$ .

- A.  $\min F = 27$ .      B.  $\min F = 12\sqrt[3]{9}$ .      C.  $\min F = 9$ .      D.  $\min F = 6\sqrt[3]{12}$ .

**Câu 36.** Gọi  $M, m$  lần lượt là các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số  $y = x + 2\ln x$  trên  $[1; e]$ . Tính giá trị của  $T = M + m$ .

- A.  $T = e + 3$ .      B.  $T = e + 1$ .      C.  $T = e + \frac{2}{e}$ .      D.  $T = 4 + \frac{2}{e}$ .

**Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

- A.  $m < 2$ .      B.  $m < -2$  hoặc  $m > 2$ .  
C.  $-2 \leq m \leq 2$ .      D.  $-2 < m < 2$ .

**Câu 38.** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2^x + 2^y = 4$ . Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy$ .

- A.  $P_{\max} = \frac{27}{2}$ .      B.  $P_{\max} = 18$ .      C.  $P_{\max} = 27$ .      D.  $P_{\max} = 12$ .

**Câu 39.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

- A.  $m \leq \frac{2}{3}$ .      B.  $m > \frac{2}{3}$ .      C.  $m \geq \frac{3}{2}$ .      D.  $m < \frac{3}{2}$ .

**Câu 40.** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}$  lần lượt là

- A. 2 và  $2\sqrt{2}$ .      B. 2 và 3.      C.  $\sqrt{2}$  và 3.      D.  $2\sqrt{2}$  và 3.

Câu 41. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ .      B.  $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ .      C.  $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^x$ .      D.  $y = \left(\frac{e+1}{\pi}\right)^x$ .

Câu 42. Cho  $x, y$  là các số dương thỏa mãn  $xy \leq 4y - 1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y}$  là  $a + \ln b$ . Giá trị của tích  $ab$  là

- A. 45.      B. 81.      C. 108.      D. 115.

Câu 43. Tập xác định của hàm số  $y = (x+3)^{\frac{3}{2}} - \sqrt[4]{5-x}$  là

- A.  $D = (-3; +\infty)$ .      B.  $D = (-3; 5)$ .      C.  $D = (-3; +\infty) \setminus \{5\}$ .      D.  $D = (-3; 5]$

Câu 44. Cho hàm số  $f(x) = \log_3(x^2 - 2x)$ . Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $f''(x) = 0$  là

- A.  $S = \emptyset$ .      B.  $S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$ .      C.  $S = \{0; 2\}$ .      D.  $S = \{1\}$ .

Câu 45. Cho hàm số  $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Nếu  $a+b=3$  thì  $f(a) + f(b-2)$  có giá trị bằng

- A. 1.      B. 2.      C.  $\frac{1}{4}$ .      D.  $\frac{3}{4}$ .

Câu 46. Cho  $x, y$  là số thực dương thỏa mãn  $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x + y$ .

- A.  $P = 6$ .      B.  $P = 2\sqrt{2} + 3$ .      C.  $P = 2 + 3\sqrt{2}$ .      D.  $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$ .

Câu 47. Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$  đồng biến trên

khoảng  $\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$ .

- A.  $m \in [-1; 2]$ .      B.  $m \in (1; 2)$ .      C.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 2]$ .      D.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

Câu 48. Cho  $a$  là số thực dương khác 1 và  $b > 0$  thỏa  $\log_a b = \sqrt{3}$ . Tính  $A = \log_{ab^2} \frac{a}{b^2}$  bằng

- A.  $\frac{4\sqrt{3}-13}{11}$ .      B.  $\frac{13-4\sqrt{3}}{11}$ .      C.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$ .      D.  $\frac{1}{12}$ .

**Câu 49.** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > 0, 0 < b < 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức

$$P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a}.$$

- A.  $P_{\min} = \frac{9}{4}$ .      B.  $P_{\min} = \frac{7}{4}$ .      C.  $P_{\min} = \frac{13}{4}$ .      D.  $P_{\min} = 4$

**Câu 50.** Cho  $a \in \left[\frac{1}{9}; 3\right]$  và  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$9 \log_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1. \text{ Khi đó giá trị của } A = 5m + 2M \text{ là}$$

- A. 4.      B. 5.      C. 8.      D. 6.

**Câu 51.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\ln x}{x}$  có tọa độ điểm cực đại là  $(a; b)$ . Khi đó  $ab$  bằng

- A.  $e$ .      B.  $2e$ .      C. 1.      D. -1.

**Câu 52.** Cho  $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ . Biết rằng  $f(\log(\log e)) = 2$ . Tính giá trị của  $f(\log(\ln 10))$

- A. 10.      B. 2.      C. 4.      D. 8.

**Câu 53.** Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a \geq b > 1$ . Biết rằng biểu thức  $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$  đạt giá trị lớn nhất khi  $b = a^k$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $k \in (2; 3)$ .      B.  $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .      C.  $k \in (-1; 0)$ .      D.  $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ .

**Câu 54.** Cho ba số thực  $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c \left(a - \frac{1}{4}\right).$$

- A.  $P_{\min} = 3$ .      B.  $P_{\min} = 6$ .      C.  $P_{\min} = 3\sqrt{3}$ .      D.  $P_{\min} = 1$

### Bảng Đáp Án

1.C	2.C	3.A	4.B	5.C	6.B	7.B	8.B	9.C	10.A
11.B	12.B	13.D	14.A	15.C	16.A	17.D	18.B	19.A	20.C
21.B	22.B	23.D	24.A	25.B	26.D	27.B	28.B	29.A	30.D
31.D	32.B	33.C	34.A	35.A	36.A	37.D	38.B	39.B	40.D
41.D	42.B	43.D	44.A	45.A	46.B	47.C	48.A	49.C	50.D
51.C	52.A	53.D	54.B						

## Chuyên đề Mũ – Logarit

Casio Expert : Nguyễn Thế Lực

**Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức:**

**Một số chức năng cần biết**

Phép Mũ	Phép mũ cơ số e	Phép gán vào biến nhớ
$2^3$ $\boxed{2} \boxed{x^y} \boxed{3}$	$e^x$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\ln} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{\text{)}} \boxed{=}$	$10 \rightarrow A$ $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{(\leftarrow)}$
$2^3$ Math	$e^x$ Math	$10 \rightarrow A$ Math $\blacktriangle$
		10

Logarit cơ số bất kì	Logarit Nepe của X	Logarit cơ số 10
$\log_2 3$ $\boxed{\log} \boxed{\text{}} \boxed{2} \boxed{\text{RCL}} \boxed{3}$	$\ln(x)$ $\boxed{\ln} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{\text{)}} \boxed{=}$	$\log$ $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\text{)}} \boxed{=}$
$\log_2(3)$ Math	$\ln(X)$ Math	$\log(10)$ Math $\blacktriangle$

Logarit có số mũ	Logarit Nepe có số mũ
$\log_2 3$ $\boxed{\log} \boxed{\text{}} \boxed{2} \boxed{\text{RCL}} \boxed{3} \boxed{\text{RCL}} \boxed{x^y} \boxed{2} \boxed{=}$	$\ln^2 x$ $\boxed{\ln} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{\text{)}} \boxed{x^2} \boxed{=}$ khác $\ln x^2$ $\boxed{\ln} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{)}} \boxed{x^2} \boxed{\text{)}} \boxed{=}$
$\log_2(3)^2$ Math $\blacktriangle$	$\ln(X)^2$ Math $\blacktriangle$ $\ln(X^2)$ Math $\blacktriangle$
2.512106129	5.30189811 4.605170186

**Ví dụ 1:** Nếu  $a = \log_{15} 3$  thì:

A.  $\log_{25} 15 = \frac{3}{5(1-a)}$  B.  $\log_{25} 15 = \frac{5}{3(1-a)}$  C.  $\log_{25} 15 = \frac{1}{2(1-a)}$  D.  $\log_{25} 15 = \frac{1}{5(1-a)}$

**Hướng dẫn**

Bước 1: Lưu giá trị Logarit vào A để tiện so sánh	
$\boxed{\log} \boxed{\text{}} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{\text{RCL}} \boxed{3} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{(\leftarrow)}$	$\log_{15}(3) \rightarrow A$ Math $\blacktriangle$
	0.4056838711

<p><b>Bước 2: Thử từng đáp án</b></p> <p> <input type="button" value="log&lt;sub&gt;a&lt;/sub&gt;"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="5"/> <input type="button" value="▶"/> <input type="button" value="1"/> <input type="button" value="5"/> <input type="button" value="▶"/> <input type="button" value="−"/> <input type="button" value="⎵"/> <input type="button" value="3"/> <input type="button" value="▼"/> <input type="button" value="5"/> <input type="button" value="( 1 −"/> <input type="button" value="ALPHA"/> <input type="button" value="(→"/> <input type="button" value=")"/> </p> <p>Nếu không thấy bằng 0 thì tiếp tục thử đáp án khác</p> <p>Sử dụng mũi tên ◀ để sửa biểu thức cho nhanh</p>	<div> <div> <div>□</div> <div>Math ▲</div> </div> <math display="block">\log_{25}(15) - \frac{3}{5(1-A)}</math> <div>-0.1682606194</div> </div>
<p><b>Bước 3: Chọn đáp án đúng</b></p>	<div> <div> <div>□</div> <div>Math ▲</div> </div> <math display="block">\log_{25}(15) - \frac{1}{2(1-A)}</math> <div>0</div> </div>

**Ví dụ 2:** (Trích đề mẫu số 2 – 2017) Với các số thực dương  $a, b$  bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

$$\mathbf{A}.\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b$$

$$\mathbf{B}.\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$$

$$\text{C. } \log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$$

$$\mathbf{D}.\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$$

### Hướng dẫn:

<p><b>Bước 1: Lưu giá trị 100 vào A, 10 vào B (tùy ý)</b></p> <p> <input type="button" value="1"/> <input type="button" value="0"/> <input type="button" value="0"/> <input type="button" value="SHIFT"/> <input type="button" value="RCL"/> <input type="button" value="(→)"/> </p> <p> <input type="button" value="1"/> <input type="button" value="0"/> <input type="button" value="SHIFT"/> <input type="button" value="RCL"/> <input type="button" value="0,00"/> </p>	<p> <math>100 \rightarrow A</math> <math>10 \rightarrow B</math> </p> <p> <math>100</math> <math>10</math> </p>
<p><b>Bước 2: Thử từng đáp án</b></p> <p> <input type="button" value="log&lt;sub&gt;a&lt;/sub&gt;"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="►"/> <input type="button" value="□"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="ALPHA"/> <input type="button" value="(→)"/> <input type="button" value="x&lt;sup&gt;n&lt;/sup&gt;"/> <input type="button" value="3"/> <input type="button" value="▼"/> <input type="button" value="ALPHA"/> <input type="button" value="0,00"/> <input type="button" value="►"/> </p> <p> <input type="button" value="►"/> <input type="button" value="−"/> <input type="button" value("(""=""/> <input type="button" value="1"/> <input type="button" value="+"/> <input type="button" value="3"/> <input type="button" value="log&lt;sub&gt;a&lt;/sub&gt;"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="►"/> <input type="button" value="ALPHA"/> <input type="button" value="(→)"/> <input type="button" value="►"/> <input type="button" value="−"/> </p> <p> <input type="button" value="log&lt;sub&gt;a&lt;/sub&gt;"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="►"/> <input type="button" value="ALPHA"/> <input type="button" value="0,00"/> <input type="button" value="►"/> <input type="button" value=")"/> <input type="button" value="□"/> </p>	<p> <math>\log_2\left(\frac{2A^3}{B}\right) - (1+3 \cdot \dots)</math> </p> <p> <math>0</math> </p>
<p><b>Bước 3: Chọn đáp án đúng</b></p>	

**Ví dụ 3:** (Trích đề mẫu số 2 – 2017) Cho biểu thức  $P = \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x^3}}}$ , với  $x > 0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\mathbf{A}_* x^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{B}_* x^{\frac{13}{24}}$$

$$C_1 x^{\frac{1}{4}}$$

$$D_{x^{\frac{2}{3}}}$$

## Hướng dẫn

### Cách 1:

<b>Bước 1: Lưu một số dương khác 1 vào X</b> $2 \rightarrow X$ [2] [SHIFT] [RCL] [X]	$2 \rightarrow X$ Math ▲ 2
<b>Bước 2: Xét hiệu biểu thức với các đáp án</b> [SHIFT] [x <sup>n</sup> ] [4] [▶] [ALPHA] [X] [SHIFT] [√] [ALPHA] [X] [x <sup>2</sup> ] [√] [ALPHA] [X] [SHIFT] [x <sup>2</sup> ] [▶] [▶] [▶] [=] [ALPHA] [X] [x <sup>n</sup> ] [=] [1] [▼] [2] [=]	$4\sqrt[3]{X\sqrt{X^2}\sqrt{X^3}} - X^{\frac{1}{2}}$ 0.04143962047
<b>Bước 3: Chọn đáp án đúng</b> Để sửa biểu thức bấm ◀	$4\sqrt[3]{X\sqrt{X^2}\sqrt{X^3}} - X^{\frac{13}{24}}$ 0

**Cách 2:**

<b>Bước 1: Lưu 10 vào X</b> $10 \rightarrow X$ [1] [0] [SHIFT] [RCL] [X]	$10 \rightarrow X$ Math ▲ 10
<b>Bước 2: Bấm</b> [log] [SHIFT] [x <sup>n</sup> ] [4] [▶] [ALPHA] [X] [SHIFT] [√] [ALPHA] [X] [x <sup>2</sup> ] [√] [ALPHA] [X] [SHIFT] [x <sup>2</sup> ] [▶] [▶] [▶] [X] [=]	$4\sqrt[3]{X\sqrt{X^2}\sqrt{X^3}} - X^{\frac{1}{2}}$ 0.04143962047
<b>Bước 3: Chọn đáp án đúng</b>	Ans $\frac{13}{24}$

**Ví dụ 4:** Cho  $a, b > 0$ , rút gọn biểu thức  $P = \log_{\frac{1}{2}} a + 4\log_4 b$

A.  $P = \log_2 \left( \frac{2b}{a} \right)$     B.  $P = \log_2 (b^2 - a)$     C.  $P = \log_2 (ab^2)$     D.  $P = \log_2 \left( \frac{b^2}{a} \right)$

Hướng dẫn

<b>Bước 1: Gán các số vào A,B</b> $2 \rightarrow A, 3 \rightarrow B$	$2 \rightarrow A$ $3 \rightarrow B$ Math ▲ 2    3
<b>Bước 2: Xét hiệu giá trị biểu thức với các đáp án</b> Xét đáp án A [log] [X] [0] [.] [5] [▶] [ALPHA] [(−)] [▶] [+] [4] [log] [X] [4] [▶] [ALPHA] ["] [▶] [=] [log] [X] [2] [▶] [=] [2]	$\log_{0.5}(A) + 4\log_4 B$ 0.5849625007

<div> <div>ALPHA</div> <div>0000</div> <div>▼</div> <div>ALPHA</div> <div>(←)</div> <div>≡</div> </div>	
Bước 3: Chọn đáp án đúng	<div> <div> <div>□</div> <div>Math ▲</div> </div> <math display="block">4(B) - \log_2\left(\frac{B^2}{A}\right)</math> </div>

**Ví dụ 5:** Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$ . Tính tỉ số  $T = \frac{a}{b}$

A.  $T = \frac{4}{3}$

B.  $T = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

$$C. T = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

D.  $T = \frac{8}{5}$

## Hướng dẫn

**Các em bấm máy giải phương trình thôi, em nào nhanh thì nhập luôn, không nhấp 1 chút**

$$\log_9 a = \log_{12} b \rightarrow b = 12^{\log_9 a} \rightarrow \log_9 a = \log_{16}(a + 12^{\log_9 a}).$$

$\log_9(X) - \log_{16}(X)$   
 $X = 39.4622117$   
 $L-R = 0$   
 $\frac{X}{12^{\log_9(X)}}$   
 $0.6180339887$

**Vậy được : Đáp án C**

**Ví dụ 6:** Cho  $f(x) = \frac{2016^x}{2016^x + \sqrt{2016}}$ . Tính giá trị biểu thức

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$$

**A.**  $S = 2016$

### B. $S = 2017$

**C.**  $S = 1008$

**D.**  $S = \sqrt{2016}$

**Cách 1: Tư duy ra điều đặc biệt xem tổng số đầu và cuối học từ lớp 6**

Ta có:  $f(\frac{1}{2017})+f(\frac{2016}{2017})=1$

Math ▾	Math ▴	Ans+PreAns	Math ▴
$\frac{2016^X}{2016^X + \sqrt{2016}}$	$\frac{2016^X}{2016^X + \sqrt{2016}}$		
0.02186708678	0.9781329132		

Tương tự với các cặp khác  $f(x)+f(1-x)=1$  mà chúng ta có  $2016:2 = 1008$  cặp như vậy nên S có tổng là S=1008

**Cách 2 : Ứng dụng tích phân tính giá trị trung bình của hàm trong 1 đoạn**

Công thức:  $\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$$\frac{1}{2017} \times \left[ \frac{1}{1 \div 2017} \right] \text{Math} \Delta$$

$$\frac{2015}{2017}$$

$$0.5$$

Từ giá trị trung bình nhân với 2016 số hạng của tổng là xong ^^ được S=1008

**Ví dụ 7: Cho**  $f(1)=1, f(m+n)=f(m)+f(n)+mn, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$  . **Giá trị biểu thức**

$$T = \log \frac{f(96) - f(69) - 241}{2}$$

**Hướng dẫn**

Ta có :

$$f(x) = f[(x-1)+1] = f(x-1) + f(1) + (x-1) = f(x-1) + x$$

$$f(x-1) = f(x-2) + x-1$$

....

$$\rightarrow f(x) = x + x - 1 + \dots + 2 + 1 = \frac{x(x+1)}{2}$$

Từ đó ta có :  $f(96) = 4656, f(69) = 2415 \rightarrow T = 3$



## Bài tập rèn luyện

**Câu 1.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\log_3 5 > 0$ . B.  $\log_{2-\sqrt{2}} 2016 < \log_{2-\sqrt{2}} 2017$ . C.  $\log_{0,3} 0,8 > 0$ . D.  $\log_{x^2+2} 2016 < \log_{x^2+2} 2017$

**Câu 2.** Cho  $a, b$  là các số thực dương và  $ab \neq 1$  thỏa mãn  $\log_{ab} a^2 = 3$  thì giá trị của  $\log_{ab} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$  bằng:

- A.  $\frac{3}{8}$ . B.  $\frac{3}{2}$ . C.  $\frac{8}{3}$ . D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 3.** Giá trị của biểu thức  $A = 8^{\log_2 3} + 9^{\frac{1}{\log_2 3}}$  bằng

- A. 31. B. 5. C. 11. D. 17.

**Câu 4.** Đặt  $\log_2 6 = m$ . Hãy biểu diễn  $\log_9 6$  theo  $m$ .

- A.  $\log_9 6 = \frac{m}{2(m+1)}$ . B.  $\log_9 6 = \frac{m}{2(m-1)}$ . C.  $\log_9 6 = \frac{m}{m+1}$ . D.  $\log_9 6 = \frac{m}{m-1}$ .

**Câu 5.** Rút gọn biểu thức  $T = \left( \frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2}{a-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ , với  $a$  là số thực dương khác 1.

- A.  $T = \frac{2}{a-1}$ . B.  $T = \frac{a-1}{b}$ . C.  $T = 2\sqrt{a}$ . D.  $T = \sqrt{a}+1$ .

**Câu 6.** Cho  $a$  là số thực dương,  $a \neq 1$ . Khẳng định nào sau đây SAI?

- A.  $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = -\frac{1}{3}$ . B.  $9^{\log_3 a} = 2a$ . C.  $\log_a \frac{1}{a} = -1$ . D.  $(0,125)^{\log_{0,5} 1} = 1$

**Câu 7.** Giá trị của biểu thức  $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$  là

- A. 9. B. -9. C. -10. D. 10.

**Câu 8.** Cho biểu thức  $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$ , với  $x > 0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $P = x^{\frac{1}{2}}$ . B.  $P = x^{\frac{13}{24}}$ . C.  $P = x^{\frac{1}{4}}$ . D.  $P = x^{\frac{2}{3}}$ .

**Câu 9.** Với các số thực dương  $a, b$  bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$ . B.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$ .

C.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b.$

D.  $\log_2 \left( \frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b.$

Câu 10. Cho  $\log_2 3 = a; \log_3 5 = b$ . Khi đó  $\log_{12} 90$  tính theo  $a, b$  bằng:

A.  $\frac{ab+2a+1}{a-2}.$

B.  $\frac{ab-2a+1}{a+2}.$

C.  $\frac{ab-2a+1}{a+2}.$

D.  $\frac{ab+2a+1}{a+2}.$

Câu 11. Đặt  $a = \ln 2$  và  $b = \ln 3$ . Biểu diễn  $S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{71}{72}$  theo  $a$  và  $b$ :

A.  $S = -3a - 2b.$  B.  $S = -3a + 2b.$  C.  $S = 3a + 2b.$  D.  $S = 3a - 2b.$

Câu 12. Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $e < a < b$ . Khẳng định nào dưới đây là sai?

A.  $\ln ab > 2.$

B.  $\log_a e + \log_b e < 2.$

C.  $\ln \frac{a}{b} > 0.$

D.  $\ln b > \ln a.$

Câu 13. Cho  $\log_2 b = 4, \log_2 c = -4$ . Hãy tính  $\log_2(b^2c)$ .

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức sau  $\log_{\frac{1}{a}} a^2 + \log_{a^2} a^{\frac{1}{2}}; 1 \neq a > 0$ .

A.  $\frac{17}{4}$

B.  $\frac{13}{4}$

C.  $-\frac{11}{4}$

D.  $-\frac{15}{4}$

Câu 15. Cho  $a, b$  là các số thực dương. Viết biểu thức  $\sqrt[12]{a^3b^3}$  dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A.  $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}.$

B.  $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{9}}.$

C.  $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}.$

D.  $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}.$

Câu 16. Cho  $a, b$  là hai số thực dương. Rút gọn biểu thức  $\frac{a^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}.$

A.  $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}.$

B.  $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}.$

C.  $\sqrt[3]{ab}.$

D.  $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}.$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức  $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ).$

A.  $P = 1.$

B.  $P = \frac{1}{2}.$

C.  $P = 0.$

D.  $P = 2.$

**Câu 18.** Cho số thực  $x$  thỏa mãn:  $\log x = \frac{1}{2} \log 3a - 2 \log b + 3 \log \sqrt{c}$  ( $a, b, c$  là các số thực dương). Hãy biểu diễn  $x$  theo  $a, b, c$ .

A.  $x = \frac{\sqrt{3ac^3}}{b^2}$ .      B.  $x = \frac{\sqrt{3a}}{b^2 c^3}$ .      C.  $x = \frac{\sqrt{3a} \cdot c^3}{b^2}$ .      D.  $x = \frac{\sqrt{3ac}}{b^2}$ .

**Câu 19.** Rút gọn biểu thức:  $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}}, (x > 0)$  ta được

A.  $\sqrt[4]{x}$ .      B.  $\sqrt[6]{x}$ .      C.  $\sqrt[8]{x}$ .      D.  $\sqrt{x}$ .

**Câu 20.** Cho  $a = \log_2 20$ . Tính  $\log_{20} 5$  theo  $a$ .

A.  $\frac{5a}{2}$ .      B.  $\frac{a+1}{a}$ .      C.  $\frac{a-2}{a}$ .      D.  $\frac{a+1}{a-2}$ .

**Câu 21.** Với  $a, b > 0$  bất kỳ. Cho biểu thức  $P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ . Tìm mệnh đề đúng.

A.  $P = \sqrt{ab}$ .      B.  $P = \sqrt[3]{ab}$ .      C.  $P = \sqrt[6]{ab}$ .      D.  $P = ab$ .

**Câu 22.** Cho  $x = \log_6 5, y = \log_2 3, z = \log_4 10, t = \log_7 5$ . Chọn thứ tự đúng.

A.  $z > x > t > y$ .      B.  $z > y > t > x$ .      C.  $y > z > x > t$ .      D.  $z > y > x > t$ .

**Câu 23.** Cho  $\log 3 = a$  và  $\log 5 = b$ . Biểu diễn  $\log_6 1125$  theo  $a$  và  $b$  bằng

A.  $\frac{3a+2b}{a-1+b}$ .      B.  $\frac{2a+3b}{a+1-b}$ .      C.  $\frac{3a+2b}{a+1-b}$ .      D.  $\frac{3a-2b}{a+1+b}$ .

**Câu 24.** Cho  $\log 3 = m, \ln 3 = n$ . Hãy biểu diễn  $\ln 30$  theo  $m$  và  $n$

A.  $\ln 30 = \frac{n}{m} + 1$ .      B.  $\ln 30 = \frac{m}{n} + n$ .      C.  $\ln 30 = \frac{n+m}{n}$ .      D.  $\ln 30 = \frac{n}{m} + n$ .

**Câu 25.** Cho  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Biểu thức  $2^{\sin^4 \alpha} \cdot 2^{\cos^4 \alpha} \cdot 4^{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$  bằng

A. 4.      B.  $2^{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$       C.  $2^{\sin \alpha + \cos \alpha}$       D. 2.

**Câu 26.** Giá trị biểu thức  $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{2a^5 \left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$  ( $a > 0$ ) là

A.  $a^5$ .      B.  $\frac{1}{a^5}$ .      C.  $\frac{1}{2}$ .      D. 2.

**Câu 27.** Nếu  $\log_{12} 6 = a, \log_{12} 7 = b$  thì

A.  $\log_2 7 = \frac{a}{a-1}$ .      B.  $\log_2 7 = \frac{a}{1-b}$ .      C.  $\log_2 7 = \frac{a}{1+b}$ .      D.  $\log_2 7 = \frac{b}{1-a}$ .

**Câu 28.** Cho  $a, b$  là các số thực dương và khác 1. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A.  $a^{\frac{1}{\log_b a^2}} = b^2$ .      B.  $a^{\frac{1}{\log_b a^2}} = a\sqrt{b}$ .      C.  $a^{\frac{1}{\log_b a^2}} = b\sqrt{a}$ .      D.  $a^{\frac{1}{\log_b a^2}} = \sqrt{b}$ .

**Câu 29.** Cho  $a, b$  là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn  $\log_a b = 3$ . Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log_{\sqrt{b}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}.$$

A.  $T = 1$ .      B.  $T = 4$ .      C.  $T = -\frac{3}{4}$ .      D.  $T = -4$ .

**Câu 30.** Cho  $a, b$  là các số thực dương và  $a$  khác 1. Nếu  $\log_a b = p$  thì  $\log_a a^2 b^4$  bằng

A.  $4p + 2$ .      B.  $4p + 2a$ .      C.  $a^2 p^4$ .      D.  $p^4 + 2a$ .

**Câu 31.** Cho  $a, b$  là các số thực dương khác 1, thỏa  $\log_{a^2} b + \log_{b^2} a = 1$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A.  $a = \frac{1}{b}$ .      B.  $a = b$ .      C.  $a = \frac{1}{b^2}$ .      D.  $a = b^2$ .

**Câu 32.** Cho  $a$  là số thực dương, khác 1 và thỏa mãn  $\frac{1}{2}(a^\alpha + a^{-\alpha}) = 1$ . Tìm  $\alpha$ .

A.  $\alpha = -1$ .      B.  $\alpha = 1$ .      C.  $\alpha \in \mathbb{R}$ .      D.  $\alpha = 0$ .

**Câu 33.** Cho  $P = \log_m 16m$  và  $a = \log_2 m$  với  $m$  là số dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $P = 3 - a^2$ .      B.  $P = \frac{4+a}{a}$ .      C.  $P = \frac{3+a}{a}$ .      D.  $P = 3 + a\sqrt{a}$ .

**Câu 34.** Cho biểu thức  $P = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$ , với  $a$  là số dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $P = 2\ln^2 a + 1$ .      B.  $P = 2\ln^2 a + 2$ .      C.  $P = 2\ln^2 a$ .      D.  $P = \ln^2 a + 2$ .

**Câu 35.** Cho  $a, b$  là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn  $\log_a^2 b - 8\log_b(a\sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$ . Tính giá

trị biểu thức  $P = \log_a(a\sqrt[3]{ab}) + 2017$ .

A.  $P = 2019$ .      B.  $P = 2020$ .      C.  $P = 2017$ .      D.  $P = 2016$ .

**Câu 36.** Cho hai số thực dương  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$ . Tính tỉ số  $\frac{a}{b}$ .

- A.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .      B.  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .      C.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 37.** Cho  $n > 1$  là một số nguyên. Giá trị của biểu thức  $\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \dots + \frac{1}{\log_n n!}$  bằng

- A. 0.      B.  $n$ .      C.  $n!$ .      D. 1.

**Câu 38.** Cho  $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16} (x+y)$ . Giá trị của tỉ số  $\frac{x}{y}$  là

- A.  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .      B.  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .      D.  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 39.** Cho  $\frac{\log a}{p} = \frac{\log b}{q} = \frac{\log c}{r} = \log x \neq 0$ ;  $\frac{b^2}{ac} = x^y$ . Tính  $y$  theo  $p, q, r$ .

- A.  $y = q^2 - pr$ .      B.  $y = \frac{p+r}{2q}$ .      C.  $y = 2q - p - r$ .      D.  $y = 2q - pr$ .

**Câu 40.** Cho  $x, y, z$  là ba số thực khác 0 thỏa mãn  $2^x = 5^y = 10^{-z}$ . Giá trị của biểu thức  $A = xy + yz + zx$  bằng?

- A. 3.      B. 0.      C. 1.      D. 2.

**Câu 41.** Cho  $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$ . Biết rằng  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$  với  $m, n$  là các số tự nhiên và  $\frac{m}{n}$  tối giản. Tính  $m - n^2$ .

- A.  $m - n^2 = 2018$ .      B.  $m - n^2 = -2018$ .      C.  $m - n^2 = 1$ .      D.  $m - n^2 = -1$ .

**Câu 42.** Cho hàm số  $f(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$  với  $a > 0, a \neq 1$ . Tính giá trị  $M = f(2017^{2016})$ .

- A.  $M = 2017^{1008} - 1$ .      B.  $M = -2017^{1008} - 1$ .      C.  $M = 2017^{2016} - 1$ .      D.  $M = 1 - 2017^{2016}$ .

**Câu 43.** Cho các số thực  $x, y, z, t, a, b, c$  thỏa mãn  $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$  và  $xy = z^2 t^2$ . Tính giá trị  $P = a + b - 2c$ .

A. 4.

B.  $\frac{1}{2}$ .

C. -2.

D. 2.

Câu 44. Cho  $a, b, c > 0, c \neq 1$  và đặt  $\log_c a = m, \log_c b = n, T = \log_{\sqrt{c}} \left( \frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}} \right)$ . Tính  $T$  theo  $m, n$ .

A.  $T = \frac{3}{2}m - \frac{3}{8}n$ .B.  $T = 6n - \frac{3}{2}m$ .C.  $T = \frac{3}{2}m + \frac{3}{8}n$ .D.  $T = 6m - \frac{3}{2}n$ .

Câu 45. Cho hàm số  $f(x) = \ln 2017 - \ln \left( \frac{x+1}{x} \right)$ . Tính tổng  $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017)$ .

A.  $S = \frac{4035}{2018}$ .B.  $S = 2017$ .C.  $S = \frac{2016}{2017}$ .D.  $S = \frac{2017}{2018}$ .

Câu 46. Cho hàm số  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ . Tính tổng  $T = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$ .

A.  $T = 2016$ .B.  $T = 2017$ .C.  $T = \frac{2016}{2017}$ .D.  $T = 1008$ .

Câu 47. Giả sử hàm số  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x) = x(1-x)e^{-x}$ . Tính  $S = a + 2b + 2015c$ .

A.  $S = 2015$ .B.  $S = 2018$ .C.  $S = -2017$ .D.  $S = 2017$ .

Câu 48. Kí hiệu  $f(x) = \left( x^{\frac{1}{1+\frac{1}{2\log_4 x}}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$ . Giá trị của  $f(f(2017))$  bằng

A. 2000.

B. 1500.

C. 2017.

D. 1017.

## Bảng Đáp Đáp

1.B	2.D	3.A	4.B	5.A	6.B	7.C	8.B	9.A	10.D
11.A	12.C	13.A	14.A	15.C	16.C	17.C	18.A	19.A	20.C
21.B	22.D	23.B	24.D	25.D	26.C	27.D	28.D	29.A	30.A
31.A	32.D	33.B	34.B	35.A	36.A	37.D	38.C	39.C	40.B
41.D	42.B	43.D	44.D	45.D	46.D	47.B	48.C		

## Phương Trình, Bất Phương Trình Mũ - Logarit

### I. Phương trình mũ

**Ví dụ 1.** Nghiệm của phương trình :  $8^{\frac{x}{x+2}} = 4 \cdot 3^{4-x}$  là ?

- A.  $\begin{cases} x=4 \\ x=-\log_3 2-2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x=4 \\ x=1 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x=1 \\ x=-\log_3 2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$

**Cách 1:** Dựa vào đáp án: CALC

<p><b>Bước 1:</b> Nhập phương trình vào máy tính</p> <p><math>8^{\frac{x}{x+2}} - 4 \times 3^{4-x}</math></p> <p><math>\boxed{8} \boxed{x^{\frac{\square}{\square}}} \boxed{=}</math> <math>\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\rightarrow} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{^{\square}}</math></p> <p><math>\boxed{x^{\frac{\square}{\square}}} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{=}</math></p>	<p>M <span style="float:right">Math</span></p> <p><math>8^{\frac{x}{x+2}} - 4 \times 3^{4-x}</math></p>
<p><b>Bước 2:</b> Tính giá trị biểu thức tại X = 4 (Xét đáp án A)</p> <p><math>\boxed{\text{CALC}} \boxed{4} \boxed{=}</math></p> <p>Vậy X=4 là một nghiệm của phương trình, tương tự các em CALC với <math>x = -\log_3 2 - 2</math></p> <p><math>\boxed{\text{AC}} \boxed{-} \boxed{\log_{\square}} \boxed{3} \boxed{\rightarrow} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{)} \boxed{\Delta} \boxed{=}</math></p>	<p>M <span style="float:right">Math ▲</span></p> <p><math>8^{\frac{x}{x+2}} - 4 \times 3^{4-x}</math></p> <p style="text-align:right">0</p>
<p><b>Bước 3:</b> Khoanh đáp án đúng</p>	

**Cách 2:** Dò nghiệm của phương trình bằng SOLVE

<p><b>Bước 1:</b> như trước</p> <p>Nhớ ấn <math>\boxed{=}</math> để lưu ngay cái biểu thức lại</p>	
<p><b>Bước 2:</b></p> <p>Gọi chương trình Solve</p> <p><math>\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}</math></p> <p>Xem cái nghiệm lẻ là biểu thức nào</p> <p><math>\boxed{\text{AC}} \boxed{-} \boxed{\log_{\square}} \boxed{3} \boxed{\rightarrow} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{=}</math></p>	<p>M <span style="float:right">Math ▲</span></p> <p><math>8^{\frac{x}{x+2}} - 4 \times 3^{4-x}</math></p> <p>X= -2.630929754</p> <p>L-R= 0</p> <p>M <span style="float:right">Math ▲</span></p> <p><math>-\log_3(2) - 2 - x</math></p> <p style="text-align:right">0</p>
<p><b>Bước 3:</b></p> <p>Để tìm tiếp nghiệm khác, các em lưu nghiệm lẻ vào A</p> <p><math>\boxed{\text{AC}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{(\rightarrow)}</math></p> <p>Đẩy lên cho tới khi thấy phương trình đã lưu ở bước 1</p> <p><math>\boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta}</math></p>	<p>M <span style="float:right">Math ▲</span></p> <p>Ans→A</p> <p style="text-align:right">-2.630929754</p>

$$8^{\frac{x}{x+2}} - 4 \times 3^{4-x}$$



Xét phương trình mới là  $f(x):(x-A)$

◀ ) ▶ ( ◀ ◀ ÷ ( ALPHA ) - ALPHA (-) )

Gọi lệnh Solve tiếp

SHIFT CALC = =

Các em cứ lặp lại như vậy cho tới khi máy báo Can't Solve là hết nghiệm

$$4 \times 3^{4-x} \div (x-4)$$

$$(8^{x+2} - 4 \times 3^{4-x}) \div 4$$

**Ví dụ 2.** Phương trình:  $2^{x^2-2x}.3^x = \frac{3}{2}$  có mấy nghiệm ?

- A. Vô nghiệm      B. 1      C. 2      D. 3

**Lời giải:**

**\*Tự Luận:**

$$2^{x^2-2x}.3^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \left[ 2^{(x-1)^2}.3^{x-1} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1-\log_2 3 \end{cases}$$

### Cách 1: Solve

$$2x^2 - 2x \times 3x - 1.5$$

$$2^x - 2^x \times 3^x - 1.5$$

$$2^x - 2^x \times 3^x - 1.5$$

Vậy chọn C

## Cách 2: Table

**Cho start -14=, end 14= , step 1=**

$$f(x) = 4^{-2x} \times 3^x - \frac{3}{7}$$

Math

X	F(X)
-1	1.166666667
0	-0.5
1	0

1.166666667

X	F(X)
0	-0.5
1	1
2	7.5



Có 2 chỗ nó đổi dấu âm sang dương lên phương trình có 2 nghiệm, phương pháp này chủ yếu áp dụng cho nghiệm đơn, qua nghiệm kép thì dấu lại không đổi, đa phần các bài này đều là nghiệm đơn, solve thì tỏ ra yếu đuối trước mũ-logarit

**Ví dụ 3.** Cho phương trình:  $x^3 \cdot 3^x + 27x = x \cdot 3^{x+1} + 9x^3$  tìm tổng các nghiệm của phương trình

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**Lời giải:**

**Tự luận**

$$x^3 \cdot 3^x + 27x = x \cdot 3^{x+1} + 9x^3 \Leftrightarrow (3^x - 9)(x^3 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 9 = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

**Trắc nghiệm :**

$$\begin{array}{l} M \\ X^3 \times 3^X + 27X - (X \times 3^{X+1}) \\ X = 0 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ Ans \rightarrow A \\ -1.732050808 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ Ans \rightarrow B \\ 1.732050808 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ (X^3 \times 3^X + 1 + 9X^3) \div X \\ X = 0 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ + 9X^3)) \div X(X-A) \\ X = 0 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ ) \div X(X-A)(X-B) \\ X = 0 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ (X^3 \times 3^X + 27X - (X \times 3^{X+1})) \\ X = -1.732050808 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ (X^3 \times 3^X + 27X - (X \times 3^{X+1})) \\ X = 1.732050808 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \\ (X^3 \times 3^X + 27X - (X \times 3^{X+1})) \\ X = 2 \\ L-R = 0 \end{array}$$

Vậy các em chọn B nhé.

**Ví dụ 4.** Trung bình cộng của nghiệm phương trình:  $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$  là:

- A. 0                      B. 20                      C. 10                      D. 15

**Lời giải:**

**Tự luận**

$$16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4 \cdot \frac{x+10}{x-10}}{2^3}} = \frac{1}{2^3} \cdot 2^{\frac{3 \cdot \frac{x+5}{x-15}}{2^3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4x+40}{x-10}} = 2^{\frac{3x+15}{x-15}-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+40}{x-10} = \frac{3x+15}{x-15} - 3 \Leftrightarrow (4x+40)(x-15) = 60(x-10) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20 \Rightarrow C$$

**Trắc nghiệm: Solve chịu! Do thuật toán của nó**

**Đây là 570VN Plus**

**Đây là vinacal**

Lưu ý quan trọng: Solve chỉ mạnh trong giải phương trình vô tỉ chứ đối với mũ và logarit nó tỏ ra yếu đuối hẳn

Mẹo: Ta thấy các đáp án đều nguyên nên rất có thể nghiệm cũng sẽ nguyên do đó các em sẽ dùng Table để kiểm tra nghiệm từ 0 tới 29

Lưu ý là ở bài này phải sử dụng tới TABLE mở rộng giá trị lên tới 40 giá trị thay vì mặc định là 20 bằng cách sau xét  $G(Y)$  có  $Y=X+20$

$$F(x) = 16^{\frac{x+10}{x-10}} - 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}; G(x) = 16^{\frac{(x+20)+10}{(x+20)-10}} - 0,125 \cdot 8^{\frac{(x+20)+5}{(x+20)-15}}$$

Các em vào Mode 7

M Start?

□

Math

M End?

□

Math

M Step?

□

Math

0

19

1

Ta được kết quả

M	X	F(X)	Math	G(X)
1	0	0	0	0
2	1	-0.017	1450.1	0
3	2	-0.025	1245	0

Vậy là có nghiệm  $x=0, x=20$ **Ví dụ 5:** Nếu  $\log_a x = 2\log_a b - \log_a c + 1$  thì  $x$  bằng

A.  $b^2 - c + 1$

B.  $\frac{ab^2}{c}$

C.  $ab^2$

D.  $\frac{b^2}{c} + 1$

Hướng dẫn

Ngoài cách truyền thống là các em biến đổi  $2\log_a b - \log_a c + 1 = \log_a \frac{ab^2}{c}$  thì các em còn có cách là chọn  $b=2, c=3$  rồi tiến hành Solve giải phương trình rồi đối chiếu với các đáp án

**II. Bất phương trình****Ví dụ 1:** Tìm nghiệm của bất phương trình :  $\log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$ 

A.  $x \geq 2$

B.  $x < 2$

C.  $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$

D.  $-1 \leq x \leq 2$

**Lời giải:****Tự Luận**

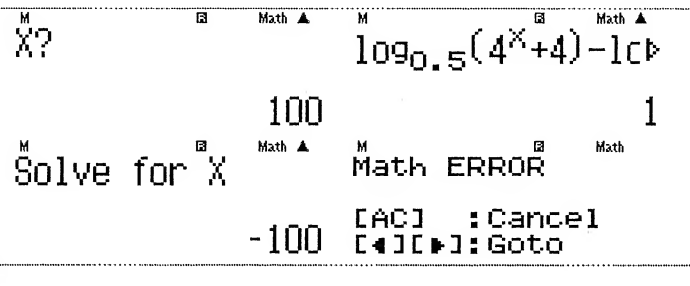
Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x > 0 \\ 4^x + 4 \leq 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 4^x + 4 \leq 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq -1 (\text{loại}) \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

**Trắc nghiệm các em làm như sau: Các em sẽ thử đáp án****Bước 1:** Nhập biểu thức:

$$\log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) - \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$$

<p><b>Bước 2:</b> CALC giá trị đặc trưng</p> <p>Đầu tiên ta thử với <math>x \geq 2</math> thì chọn <math>x = 100</math></p> <p>Vậy A hoặc C đúng thử tiếp với <math>x = -100</math></p> <p><b>Vậy loại C nên chọn A.</b></p>	
<p><b>Bước 3:</b> Khoanh đáp án đúng</p>	

**Ví dụ 2:** Nghiệm của bất phương trình:  $\log_{\frac{\pi}{4}} \left[ \log_2 (x + \sqrt{2x^2 - x}) \right] < 0$  là:

- A.  $-4 < x < 1$       B.  $\begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x < -4 \\ x > 2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x < -4 \\ x > 1 \end{cases}$

**Lời giải:**

**Tự luận**

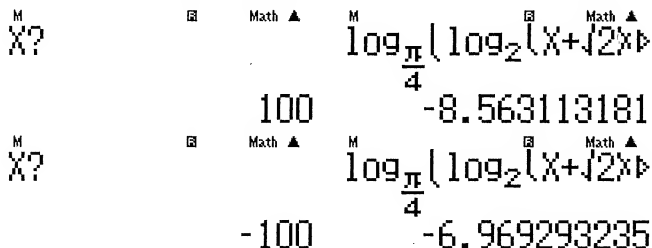
Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x + \sqrt{2x^2 - x} > 0 \\ \log_2(x + \sqrt{2x^2 - x}) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2x^2 - x} > 0 \\ x + \sqrt{2x^2 - x} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 - x} > 2$$

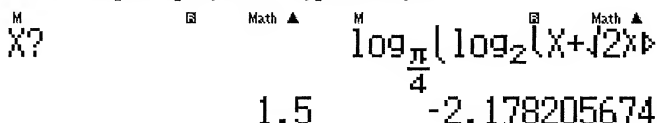
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x} > 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < 0 \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2x^2 - x > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 1 \end{cases}$$

**Trắc nghiệm :** Ví dụ này các em cũng làm tương tự

Xét đáp án có phạm vi rộng trước: B, C, D  $\Rightarrow$  Loại A



Rồi tới đáp án phạm vi hẹp để loại dần



Do đó loại C

$$\log_{\frac{\pi}{4}}(\log_2(X+12)) = -3.5 \quad 0.7160047623$$

Loại tiếp B. Vậy chọn D

**Bài tập rèn luyện**

**Câu 1.** Phương trình  $\log_3(3x-2)=3$  có nghiệm là

- A.  $\frac{29}{3}$ .                      B. 87.                      C.  $\frac{25}{3}$ .                      D.  $\frac{11}{3}$ .

**Câu 2.** Tập nghiệm của bất phương trình  $3 < \log_2 x < 4$  là

- A.  $(8;16)$ .                      B.  $(0;16)$ .                      C.  $(8;+\infty)$ .                      D.  $\mathbb{R}$ .

**Câu 3.** Phương trình  $5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26$  có tổng các nghiệm là

- A. 1.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 4.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 \cdot x_2 = 27$ .

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = \frac{4}{3}$ .                      C.  $m = 25$ .                      D.  $m = \frac{28}{3}$ .

**Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{0,8}(x^2+x) < \log_{0,8}(-2x+4)$  là:

- A.  $(1;2)$ .                      B.  $(-\infty; -4) \cup (1;2)$ .                      C.  $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ .                      D.  $(-4;1)$ .

**Câu 6.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$  là

- A. 1.                      B. 0.                      C. 9.                      D. 11.

**Câu 7.** Nghiệm của phương trình  $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$  là

- A.  $-\frac{2}{5}$ .                      B. 4.                      C.  $-\frac{1}{8}$ .                      D. 1.

**Câu 8.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$  là

- A.  $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$                       B.  $(0; +\infty) \setminus \{1\}$ .                      C.  $(-\infty; 0)$                       D.  $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

**Câu 9.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{0,8}(x^2+x) < \log_{0,8}(-2x+4)$  là:

- A.  $(1;2)$ .                      B.  $(-\infty; -4) \cup (1;2)$ .                      C.  $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ .                      D.  $(-4;1)$ .

**Câu 10.** Tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

A.  $S = (2; +\infty)$ .      B.  $S = (-\infty; 2)$ .      C.  $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      D.  $S = (-1; 2)$ .

**Câu 11.** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $6^x + (3-m)2^x - m = 0$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; 1)$ .

A.  $[3; 4]$ .      B.  $[2; 4]$ .      C.  $(2; 4)$ .      D.  $(3; 4)$ .

**Câu 12.** Phương trình  $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  khi đó tích  $x_1 \cdot x_2$  bằng:

A. 16.      B. 36.      C. 22.      D. 32.

**Câu 13.** Phương trình  $9^x - 2 \cdot 6^x + m^2 4^x = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi:

A.  $m \leq 1$ .      B.  $m < -1$  hoặc  $m > 1$ .      C.  $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ .      D.  $m \geq -1$ .

**Câu 14.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{3-2x} \geq 0$  là:

A.  $T = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .      B.  $T = \left[-2; \frac{1}{3}\right]$ .      C.  $T = \left(-2; \frac{1}{3}\right)$ .      D.  $T = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ .

**Câu 15.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ .

A. 1.      B. 0.      C. 9.      D. 11.

**Câu 16.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$ .

A.  $(-\infty; 1)$ .      B.  $[0; 1) \cup (2; 3]$ .      C.  $[0; 2) \cup (3; 7]$ .      D.  $[0; 2)$ .

**Câu 17.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $0,3^{x^2+x} > 0,09$ .

A.  $(-\infty; -2)$ .      B.  $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ .      C.  $(-2; 1)$ .      D.  $(1; +\infty)$ .

**Câu 18.** Tìm tích các nghiệm của phương trình  $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ .

A. 2.      B. -1.      C. 0.      D. 1.

**Câu 19.** Tìm nghiệm của phương trình  $\log_2(3x-2) = 3$ .

A.  $x = \frac{10}{3}$ .      B.  $x = \frac{16}{3}$ .      C.  $x = \frac{11}{3}$ .      D.  $x = \frac{8}{3}$ .

**Câu 20.** Tìm nghiệm của phương trình  $\log_3 x + \frac{1}{\log_9 x} = 3$ .

- A.  $\{1; 2\}$ .      B.  $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$ .      C.  $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$ .      D.  $\{3; 9\}$ .

**Câu 21.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$  là:

- A.  $S = \left[-\frac{3}{8}; 3\right]$ .      B.  $S = \left\{-\frac{3}{8}; 3\right\}$ .      C.  $S = (-\infty; 3)$ .      D.  $S = \left(\frac{3}{4}; 3\right]$ .

**Câu 22.** Phương trình  $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ , khi đó  $|x_1 - x_2|$  là?

- A.  $8+2\sqrt{6}$ .      B. 8.      C.  $2\sqrt{6}$ .      D.  $4\sqrt{6}$ .

**Câu 23.** Tập nghiệm của bất phương trình :  $\log_x(x+2) < \log_\pi(5-x)$

- A.  $-2 < x < \frac{3}{2}$ .      B.  $\frac{3}{2} < x < 5$ .      C.  $x < \frac{3}{2}$ .      D.  $x > \frac{3}{2}$ .

**Câu 24.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình  $\log_2^2 x = \log_2 \frac{x}{4} + 4, (x \in \mathbb{R})$  là:

- A.  $\frac{17}{4}$ .      B. 0.      C. 4.      D.  $\frac{65}{4}$ .

**Câu 25.** Cho phương trình  $4.5^{\log(100x^2)} + 25.4^{\log(10x)} = 29.10^{1+\log x}$ . Gọi  $a$  và  $b$  lần lượt là 2 nghiệm của phương trình. Khi đó tích  $ab$  bằng:

- A. 0.      B. 1.      C.  $\frac{1}{100}$ .      D.  $\frac{1}{10}$ .

**Câu 26.** Bất phương trình  $3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \leq 3$  có tập nghiệm là :

- A.  $(1; 2]$ .      B.  $[1; 2]$ .      C.  $\left[\frac{-1}{2}; 2\right]$ .      D.  $\left(\frac{-1}{2}; 2\right]$ .

**Câu 27.** Số nghiệm của phương trình  $|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^{12}$  là:

- A. 4.      B. 1.      C. 2.      D. 33.

**Câu 28.** Tất cả các giá trị của  $m$  để bất phương trình  $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$  có nghiệm đúng  $\forall x > 0$  là:

- A.  $(-2; +\infty)$ .      B.  $(-\infty; -2]$ .      C.  $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ .      D.  $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Câu 29.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$  bằng

- A. 8.      B.  $8 + \sqrt{2}$ .      C.  $8 - \sqrt{2}$ .      D.  $4 + \sqrt{2}$ .



**Câu 30.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2 + 3} - \frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x + 1} < 0$  là

- A.  $(0;1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$     B.  $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$     C.  $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup 1; \sqrt{2}$     D.  $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right) \cup \sqrt{2}; +\infty$

**Câu 31.** Giải bất phương trình  $2^{\frac{4x-1}{2x+1}} < 2^{\frac{2-2x}{2x+1}} + 1$ .

- A.  $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$     B.  $-\frac{1}{2} < x < 1$     C.  $x > 1$     D.  $x < -\frac{1}{2}$

**Câu 32.** Gọi  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  là hai nghiệm của phương trình  $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$ . Tính giá trị  $P = 3x_1 + 4x_2$ .

- A. 1    B. -2    C. 0    D. 2

**Câu 33.** Tập tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$  có đúng ba nghiệm phân biệt là:

- A.  $\left\{\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right\}$     B.  $\left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$     C.  $\left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right\}$     D.  $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:  $\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$ .

- A.  $-\frac{1}{4} < m < 0$     B.  $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$     C.  $5 < m < \frac{21}{4}$     D.  $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$

**Câu 35.** Hỏi phương trình  $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$  có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2    B. 4    C. 1    D. 3

**Câu 36.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + m - 1 = 0$  có nghiệm thuộc nửa khoảng  $(0; 1]$ ?

- A.  $\left(\frac{14}{9}; 2\right)$     B.  $\left[\frac{14}{9}; 2\right)$     C.  $\left[\frac{14}{9}; 2\right]$     D.  $\left(\frac{14}{9}; 2\right]$

**Câu 37.** Hệ bất phương trình:  $\begin{cases} \log_2(2x-4) \leq \log_2(x+1) \\ \log_{0,5}(3x-2) \leq \log_{0,5}(2x+2) \end{cases}$  có tập nghiệm là

- A.  $[2; 4]$     B.  $(4; +\infty)$     C.  $[4; 5]$     D.  $\emptyset$

**Câu 38.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_3 \left( \log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$  là:

- A.  $(0;1)$ .      B.  $\left(\frac{1}{8};1\right)$ .      C.  $(1;8)$ .      D.  $\left(\frac{1}{8};3\right)$ .

**Câu 39.** Tìm  $m$  để phương trình  $m \ln(1-x) - \ln x = m$  có nghiệm  $x \in (0;1)$

- A.  $m \in (0;+\infty)$ .      B.  $m \in (1;e)$ .      C.  $m \in (-\infty;0)$ .      D.  $m \in (-\infty;-1)$ .

**Câu 40.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $3^{\sqrt{2x+1}} - 3^{x+1} \leq x^2 - 2x$  là:

- A.  $[0;+\infty)$ .      B.  $[0;2]$ .      C.  $[2;+\infty)$ .      D.  $[2;+\infty) \cup \{0\}$ .

**Câu 41.** Biết rằng phương trình  $2^{x^2-1} = 3^{x+1}$  có 2 nghiệm là  $a, b$ . Khi đó  $a+b+ab$  có giá trị bằng

- A.  $-1+2\log_2 3$ .      B.  $1+\log_2 3$ .      C.  $-1$ .      D.  $1+2\log_2 3$ .

**Câu 42.** Số nghiệm của phương trình  $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_3 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$  là

- A. 3.      B. 2.      C. 1.      D. 4.

**Câu 43.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4^{x+y^2}=16 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm. Kết quả là

- A. 2.      B. 1.      C. 3.      D. 0.

**Câu 44.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $4^x + (1-3m)2^x + 2m^2 - m = 0$  có nghiệm.

- A.  $(-\infty;+\infty)$ .      B.  $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ .      C.  $(0;+\infty)$       D.  $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ .

**Câu 45.** Phương trình  $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$  có 2 nghiệm  $x_1; x_2$  Khi đó giá trị biểu thức  $P = x_1 + x_2 + 2x_1x_2$

- A. 0.      B. 2.      C. -2.      D. -6.

**Câu 46.** Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $\log_2^2 x + 4\log_2 x - m = 0$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0;1)$

- A.  $(-4;+\infty)$ .      B.  $[-4;+\infty)$ .      C.  $[-4;0)$ .      D.  $[-2;0]$ .

**Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình sau có đúng 3 nghiệm thực phân biệt  $9^{x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+1} + 3m - 1 = 0$ .

- A.  $m = \frac{10}{3}$ .      B.  $2 < m < \frac{10}{3}$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m < 2$ .

**Câu 48.** Gọi  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $S_3$  lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình sau:  $2^x + 2.3^x - 5^x + 3 > 0$ ;

$\log_2(x+2) \leq -2$ ;  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x > 1$ . Tìm khẳng định đúng.

- A.  $S_1 \subset S_3 \subset S_2$ .      B.  $S_2 \subset S_1 \subset S_3$ .      C.  $S_1 \subset S_2 \subset S_3$ .      D.  $S_2 \subset S_3 \subset S_1$ .

**Câu 49.** Biết phương trình  $9^x - 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x+3}{2}} - 3^{2x-1}$  có nghiệm là  $a$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a + \frac{1}{2} \log_9 2$ .

- A.  $P = \frac{1}{2}$ .      B.  $P = 1 - \log_9 \frac{1}{2}$ .      C.  $P = 1$ .      D.  $P = 1 - \frac{1}{2} \log_9 2$ .

**Câu 50.** Tìm giá trị  $m$  để phương trình  $2^{4x-|x|+1} + 2^{|x|-1} + m = 0$  có nghiệm duy nhất.

- A.  $m = 3$ .      B.  $m = \frac{1}{8}$ .      C.  $m = -3$ .      D.  $m = 1$ .

**Câu 51.** Tìm các giá trị thực của  $m$  để phương trình  $2^{x+1} = m.2^{x+2} - 2^{x+3}$  luôn thỏa mãn  $\forall x \in \mathbb{R}$

- A.  $m = 3$ .      B.  $m = \frac{3}{2}$ .      C.  $m = \frac{5}{2}$ .      D.  $m = 2$ .

**Câu 52.** Với  $m$  là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$ . Biết rằng  $x = 1$  là một nghiệm của bất phương trình.

- A.  $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ .      B.  $S = (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right]$ .      C.  $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ .      D.  $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$ .

**Câu 53.** Phương trình  $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_6 x = \log_2 x \cdot \log_4 x + \log_2 x \cdot \log_6 x + \log_4 x \cdot \log_6 x$  có tập nghiệm là

- A.  $\{1\}$ .      B.  $\{2; 4; 6\}$ .      C.  $\{1; 12\}$ .      D.  $\{1; 48\}$ .

**Câu 54.** Nếu  $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$  thì  $(\log_2 x)^2$  bằng

- A. 3.      B.  $3\sqrt{3}$ .      C. 27.      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 55.** Nếu  $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$  và  $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$  thì giá trị của  $ab$  bằng

- A.  $2^9$ .      B.  $2^{18}$ .      C. 8.      D. 2.

**Câu 56.** Phương trình  $2\log_9 x + \log_3(10-x) = \log_2 9 \cdot \log_3 2$  có hai nghiệm. Tích của hai nghiệm đó bằng

- A. 10.      B. 4.      C. 9.      D. 3.

**Câu 57.** Tìm số nghiệm thực của phương trình  $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$ .

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 58.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$  có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 59.** Tìm  $m$  để phương trình  $2^{2016x+1} + m^2 - m = 0$  có nghiệm.

A.  $m > 1$ .B.  $m < 0$  hoặc  $m > 1$ .C.  $0 < m < 1$ .D.  $m < 0$ .

**Câu 60.** Tìm  $m$  để phương trình  $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$  có nghiệm trên  $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$

A.  $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$ .B.  $m \in \mathbb{R}$ .C.  $m \in \emptyset$ .D.  $-3 < m \leq \frac{7}{3}$ .

**Câu 61.** Tìm  $m$  để phương trình  $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 = 3$ .

A.  $m > 0$ .B.  $m \in \emptyset$ .C.  $1 < m < 3$ .D.  $m = 4$ .

**Câu 62.** Giả sử hệ phương trình  $\begin{cases} \log_2(3y-2) = 2 \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất là  $(x; y) = (a; b)$  thì  $2b - a$  bằng

A.  $2 + \log_2 3$ .

B. 4.

C.  $4 - \log_2 3$ .

D. 2.

**Câu 63.** Giá trị nào của  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1, 3^{\sqrt{3}}]$ .

A.  $1 \leq m \leq 16$ .B.  $4 \leq m \leq 8$ .C.  $0 \leq m \leq 2$ .D.  $3 \leq m \leq 8$ .

**Câu 64.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để bất phương trình  $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$  có nghiệm.

A.  $m \geq -\frac{6}{7}$ .B.  $m \geq \frac{6}{7}$ .C.  $m < \frac{6}{7}$ .D.  $m < -\frac{6}{7}$ .

**Câu 65.** Số nghiệm của phương trình  $(x^2 - 4)(\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x + \dots \log_{19} x - \log_{20}^2 x) = 0$  là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 66.** Trong tất cả các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn  $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ . Giá trị thực của  $m$  để tồn tại duy nhất cặp  $(x; y)$  sao cho  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$  là

A.  $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ . B.  $\sqrt{10} - \sqrt{2}$  và  $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ . C.  $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$  và  $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$ . D.  $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ .

**Câu 67.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x - \frac{2}{\log_3(x+1)} = m$  có hai nghiệm phân biệt.

- A.  $-1 < m \neq 0$ . B.  $m > -1$ . C. Không tồn tại  $m$ . D.  $-1 < m < 0$ .

**Câu 68.** Tìm tập hợp tất cả các tham số  $m$  sao cho phương trình  $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$  có bốn nghiệm phân biệt.

- A.  $(-\infty; 1)$ . B.  $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ . C.  $[2; +\infty)$ . D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 69.** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số thực  $m$  để phương trình  $m \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)6^{x^2-2x} + m \cdot 4^{x^2-2x} = 0$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2)$ .

- A.  $[6; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 6]$ . C.  $(-\infty; 0]$ . D.  $[0; +\infty)$

**Câu 70.** Cho phương trình  $\log_3 \frac{x^2-2x+1}{x} + x^2 + 1 = 3x$  có tổng tất cả các nghiệm bằng

- A. 5. B. 3. C.  $\sqrt{5}$ . D. 2.

**Câu 71.** Tìm tập hợp các giá trị của  $m$  để phương trình  $3^x + 3 = m \cdot \sqrt{9^x + 1}$  có đúng 1 nghiệm

- A.  $[1; 3)$ . B.  $(3; \sqrt{10})$ . C.  $\{\sqrt{10}\}$ . D.  $(1; 3] \cup \{\sqrt{10}\}$ .

**Câu 72.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$  có nghiệm thực.

- A.  $0 < m \leq \frac{2}{e}$ . B.  $\frac{1}{e} \leq m < 1$ . C.  $0 < m < 1$ . D.  $-1 < m < 0$ .

1.A	2.A	3.B	4.A	5.B	6.C	7.A	8.A	9.B	10.C
11.C	12.D	13.C	14.C	15.C	16.B	17.C	18.B	19.A	20.D
21.D	22.C	23.A	24.D	25.B	26.A	27.A	28.B	29.B	30.C
31.B	32.A	33.D	34.C	35.C	36.C	37.C	38.B	39.A	40.D
41.C	42.B	43.A	44.C	45.C	46.B	47.C	48.D	49.B	50.C
51.C	52.C	53.D	54.C	55.A	56.C	57.B	58.A	59.C	60.A
61.D	62.C	63.C	64.B	65.D	66.C	67.B	68.D	69.A	70.B
71.D	72.C								

## Nguyên hàm

**Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $\int \left( x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$

A.  $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

B.  $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$

C.  $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

D.  $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

### Hướng dẫn

#### Cách 1: Sử dụng đạo hàm

**Bước 1:** Khởi động d/dx và nhập biểu thức

SHIFT  $\frac{d}{dx}$   
 ALPHA  $\frac{1}{x}$  SHIFT  $x^2$  3  $\rightarrow$  + 3  $\ln$  SHIFT  $\frac{1}{x}$  ALPHA  $\frac{1}{x}$   
 2

$$\left( \left( x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) \right)_{x=2}$$

Ta lựa chọn 1 giá trị làm hàm xác định ví dụ  $x=2$

**Bước 2:** Xét hiệu biểu thức đạo hàm các đáp án và giá trị của hàm

Lưu ý là thay luôn giá trị  $x=$  giá trị đã thay để tính đạo hàm

Ấn  $\frac{d}{dx}$  xem kết quả ra 0 chưa nếu chưa ta lại đạo hàm đáp

án khác tới khi đúng thì thôi

Xét đáp án A

$$\left( x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right)_{x=2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{3} + 3\ln(|x|) \right)$$

**Bước 3:** Khoanh đáp án đúng

**Ví dụ 2:** Nguyên hàm  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$  bằng :

A.  $\tan^3 x + C$

B.  $\frac{1}{3} \tan x + C$

C.  $3 \tan^3 x + C$

D.  $\frac{1}{3} \tan^3 x + C$

### Hướng dẫn

**Bước 1:** Chọn hệ radian nhé, cứ lượng giác là chọn radian

SHIFT MODE 4

Sau đó đạo hàm từng đáp án

$$\left( \tan(x)^3 \right)_{x=0.11}$$

<b>Bước 2:</b> Xét hiệu với giá trị biểu thức cần tính nguyên hàm tại giá trị x đã chọn Thử hết tới khi bằng 0 thì thôi Sửa biểu thức bằng nút ◀	
<b>Bước 3:</b> Chọn đáp án đúng	

**Cách 2:** Sử dụng tích phân  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Hướng dẫn:

<b>Bước 1:</b> Tính giá trị tích phân lưu vào A Chọn cận phù hợp và đủ nhỏ tính cho nhanh 	
<b>Bước 2:</b> Sử dụng CACL để tính giá trị biểu thức Xét đáp án A *Đối với máy 570 vn plus, vinacal sử dụng Ans và pressAns  *Đối với các máy còn lại ta lưu vào A và B  	
<b>Bước 3:</b> Xét hiệu A - (Ans - preAns)  Hoặc Xét hiệu A - (C - B) Nếu không bằng không ta tại xét đáp án khác lặp lại như trên Nhìn chung cách 1 vẫn nhanh hơn cách 2	

**Ví dụ 3:** Nếu  $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$  là một nguyên hàm của hàm số

$g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$  trên khoảng  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$  thì  $a+b+c$  có giá trị là

A. 3

B. 0

C. 4

D. 2

**Hướng dẫn**

**Trâu bò tự luận**

$$\left((ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}\right)' = \frac{5ax^2 + (-2a+3b)x - b + c}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \Rightarrow a+b+c=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Casio: Tư duy mình nghĩ như sau:

$$\int_a^b \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} dx = F(b) - F(a)$$

Nếu Giờ ta sẽ chọn x sao cho  $F(a) = 0 \rightarrow x = 0.5$  nhưng các em nhìn giá trị đạo hàm không xác định tại  $x=0.5$  nên ta sẽ lấy giá trị lân cận 0.5

Chú ý là  $f(1) = (a+b+c) \rightarrow$  Chọn  $b=1$

$$\text{Thì } \int_{0.5+\Delta x}^1 \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} dx \approx a+b+c$$

$$\int_{0.50000000001}^1 \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} dx = 1.999995529$$

**Chọn đáp án D.**

Nếu mà đề hỏi  $4a+2b+c$  thì các em tính tích phân từ  $0.5+\Delta x \rightarrow 2$

**Ví dụ 4:** Xác định  $a, b, c$  sao cho  $g(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$  là một nguyên hàm của hàm

số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$  trong khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

A.  $a=4, b=2, c=2$

B.  $a=1, b=-2, c=4$

C.  $a=-2, b=1, c=4$

D.  $a=4, b=-2, c=1$

**Hướng dẫn**

**Trâu bò tự luận:**

$$\left((ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}\right)' = \frac{5ax^2 + (-6a+3b)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

Casio:



Tương tự như trước nhưng mình cần xác định a,b,c thì phải xác định được giá trị của  $ax^2+bx+c$  tại  $x=100$

biểu thức

$$\int_{1.5+\Delta x}^{100} \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}} dx \approx g(100) - g(1.5) \approx g(100)$$

$$\Rightarrow ax^2+bx+c = \frac{g(100)}{\sqrt{2 \cdot 100 - 3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{197}} \times \int_{1.51}^{100} \frac{20x^2}{\sqrt{2}} \approx 39800.84479$$

Vậy  $ax^2+bx+c = 39801 = 4 \cdot 100^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 4x^2 - 2x + 1$  đáp án D

Ví dụ 5: Cho  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = a(x+2)\sqrt{x+2} + b(x+1)\sqrt{x+1} + C$  khi đó  $3a+b$  bằng?

A.  $\frac{4}{3}$

B.  $\frac{-2}{3}$

C.  $\frac{1}{3}$

D.  $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn

Ta có:  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = F(0) - F(-1) = (a\sqrt{8}+b) - a = (\sqrt{8}-1)a+b$

Các em tính giá trị tích phân rồi lưu vào A

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} dx \approx 0.5522847494$$

Ta có hệ:  $\begin{cases} (\sqrt{8}-1)a+b = tp.A \\ 3a+b = \{A, B, C, D\} \end{cases}$

Vào giải hệ **MODE** **5** **1**

**√** **8** **)** **=** **1** **=** **1** **=** **ALPHA** **(←)** **=**

Thử đáp án A

**3** **=** **1** **=** **4** **÷** **3** **=** **=**

Được  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{-2}{3}$  vậy đáp án A đúng luôn nếu ra số vô tỉ thì các em xét tiếp B,C,D

**X** = **Y** =

0.666666667 -0.666666667

**Ví dụ 6:** Hàm số  $f(x) = (3x+2)^2$  có một nguyên hàm là  $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  thỏa mãn  $F(-1) = 5$  khi đó  $a+b+c+d$  bằng ?

A.5      B.13      C.19      D.20

**Hướng dẫn**

Ta để ý một chút :  $F(1) = a+b+c+d$  và  $\int_{-1}^1 f(x)dx = F(1) - F(-1) \rightarrow F(1) = \int_{-1}^1 f(x)dx + F(-1)$

Bấm máy ta được

$$\int_{-1}^1 (3X+2)^2 dx + 5$$

19

**Ví dụ 7:** Tính tích phân số mũ cao

$$1+10^{-9} \times \int_0^{3\pi} X^3 Y X^4 dx \times \ln\left(\frac{Y81\pi^4 - 1}{4}\right)$$

1.0000000001      1.972541874 × 10<sup>-6</sup>      1.972541873 × 10<sup>-6</sup>

**Ví dụ 8:** Giả sử hàm số  $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x) = x(1-x)e^{-x}$  tính tổng  $S = a + 2b + 3c$

A. 6      B.3      C.9      D.4

**Hướng dẫn**

Chúng ta để ý :  $f(0) = (c) \cdot e^{-0} = c$

Để tìm c thì ta để ý tiếp  $f(100) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-100} \approx 0$  nên

$$\int_0^{100} x(1-x)e^{-x} dx = f(100) - f(0) \approx -c$$

$$\int_0^{100} X(1-X)e^{-X} dx$$

-1

Vậy  $c=1$ , tiếp tục tìm a,b bằng cách tính

$$\int_0^2 x(1-x)e^{-x} dx = f(2) - f(0) = (4a + 2b + 1) \cdot e^{-2} - 1$$

$$\int_0^2 X(1-X)e^{-X} dx$$

(Ans+1) ÷ e<sup>-2</sup>

-0.05265301734      7

Vậy  $4a + 2b + 1 = 0 \rightarrow a = b = c = 1$

Ngoài ra để kết quả chuẩn xác hơn nữa thì các em tính với  $x=10$  sẽ thấy rõ  $a=b=1$

$$\left( \int_0^1 x(1-x)e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx + 1 \right) \div e^{-1}$$

Vậy  $a+2b+3c=6$

### Bài tập rèn luyện

**Câu 1.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 2x$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .

B.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$ .

C.  $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$ .

D.  $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$ .

**Câu 2.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x.e^{2x}$  là:

A.  $F(x) = 2.e^{2x}(x-2) + C$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{2}.e^{2x}(x-2) + C$ .

C.  $F(x) = \frac{1}{2}.e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ .

D.  $F(x) = 2.e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ .

**Câu 3.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A.  $\int \sin x dx = \cos x + C$ . B.  $\int 2x dx = x^2 + C$ . C.  $\int e^x dx = e^x + C$ . D.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ .

**Câu 4.** Tính  $\int \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx$

A.  $F(x) = xe^x + 1 + \ln|xe^x + 1| + C$ .

B.  $F(x) = xe^x - \ln|xe^x + 1| + C$ .

C.  $F(x) = xe^x + 1 - \ln|xe^{-x} + 1| + C$ .

D.  $F(x) = e^x + 1 + \ln|xe^x + 1| + C$ .

**Câu 5.** Cho  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a(x+2)\sqrt{x+2} + b(x+1)\sqrt{x+1} + C$ . Khi đó  $3a+b$  bằng:

A.  $-\frac{2}{3}$ .

B.  $\frac{1}{3}$ .

C.  $\frac{4}{3}$ .

D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 6.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin(1-3x)$  là

A.  $-\frac{1}{3} \cos(1-3x) + C$ .

B.  $-3 \cos(1-3x) + C$ .

C.  $3 \cos(1-3x) + C$ .

D.  $\frac{1}{3} \cos(1-3x) + C$ .

**Câu 7.** Biết  $F(x) = (ax+b)e^x$  là nguyên hàm của hàm số  $y = (2x+3)e^x$ . Khi đó  $a+b$  là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

**Câu 8.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = e^{3x}$  thỏa  $F(0) = 1$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 1$ . B.  $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ . C.  $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$ . D.  $F(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$ .

**Câu 9.** Tìm nguyên hàm  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$ . Kết quả là

- A.  $\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2} + C$ . B.  $\sqrt{1+\sin^2 x} + C$ . C.  $-\sqrt{1+\sin^2 x} + C$ . D.  $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$ .

**Câu 10.** Tìm giá trị của  $m$  để hàm số  $F(x) = m^2x^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ .

- A.  $m = 2$ . B.  $m = \pm 1$ . C.  $m = -1$ . D.  $m = 1$ .

**Câu 11.** Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

- A.  $f(x) = \tan^2 x$ ,  $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2}$ . B.  $f(x) = \sin 2x$ ,  $g(x) = \cos^2 x$ .  
C.  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ . D.  $f(x) = \sin 2x$ ,  $g(x) = \sin^2 x$ .

**Câu 12.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1-2\sin^2 x}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

- A.  $\int f(x) dx = \ln|\sin x + \cos x| + C$ . B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = \ln|1 + \sin 2x| + C$ . D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|1 + \sin 2x| + C$ .

**Câu 13.** Hãy xác định hàm số  $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ . Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 3$  và  $f(3) = 4$ .

- A.  $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ . B.  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 1$ . C.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ . D.  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ .

**Câu 14.** Giả sử  $f(x) = \int \sin 2x \cdot \cos 3x dx = F(x) + C$  ( $F(x)$  không chứa hệ số tự do) và  $f(0) = 0$ . Giá trị của  $C$  là

- A.  $-\frac{4}{5}$ . B.  $\frac{2}{5}$ . C.  $-\frac{2}{5}$ . D.  $\frac{4}{5}$ .

**Câu 15.** Giả sử  $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$ . Khi đó  $a + b + c + d$  bằng

- A.  $-2$ . B.  $3$ . C.  $2$ . D.  $5$ .

**Câu 16.** Cho  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$  và  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$ . Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$  là

- A.  $S = \{2\}$ . B.  $S = \{-2; 2\}$ . C.  $S = \{1; 2\}$ . D.  $S = \{-2; 1\}$

**Câu 17.** Giả sử  $\int x(1-x)^{2017} dx = \frac{(1-x)^a}{a} - \frac{(1-x)^b}{b} + C$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $2a - b$ .

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{a}{\pi} + \cos^2 x$ . Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để  $f(x)$  có một nguyên hàm  $F(x)$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{1}{4}, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

- A.  $\pi - 2$ . B.  $\pi - 1$ . C.  $\frac{\pi}{2} - 1$ . D.  $\frac{\pi}{2} - 2$ .

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x) = (2x - 3)e^x$ . Nếu  $F(x) = (mx + n)e^x$  ( $m, n \in \mathbb{R}$ ) là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì hiệu  $m - n$  bằng

- A. 7. B. 3. C. 1. D. 6.

**Câu 20.** Biết  $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của biểu thức  $a + b$ .

- A.  $a + b = 1$ . B.  $a + b = 5$ . C.  $a + b = -1$ . D.  $a + b = -5$ .

1.A	2.C	3.A	4.B	5.C	6.D	7.B	8.C	9.D	10.D
11.D	12.A	13.C	14.C	15.B	16.A	17.D	18.D	19.A	20.C

# Tích Phân

## Version 2.0 HyperX

**Dạng 1: Tích phân xác định :** Dạng này khá đơn giản các bạn chỉ cần nhập trực tiếp tích phân cần tính và bấm = để ra KQ

**Ví dụ 1[Hàm Đa Thức]:** Tính tích phân sau:  $\int_1^2 e^x \frac{\ln x}{x^7} dx$

<b>Bước 1:</b> Nhập biểu thức cần tính tích phân. 	$\int_1^2 \frac{e^x \ln(x)}{x^7} dx$
<b>Bước 2:</b> Bấm $\boxed{=}$ để thấy kết quả	$\int_1^2 \frac{e^x \ln(x)}{x^7} dx$ 0.1011388899
<b>Bước 3:</b> Để tiện cho việc so sánh với các đáp án thì thay vì ở bước 2 các em bấm $\boxed{=}$ thì các em bấm $\boxed{SHIFT} \boxed{RCL} \boxed{(-)}$ để lưu kết quả vào A	$\int_1^2 \frac{e^x \ln(x)}{x^7} dx \rightarrow A$ 0.1011388899

**Ví dụ 2 [Hàm Lượng Giác]:** Tính  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$

A. 0      B. 1      C.  $\pi$       D.  $-\pi$

<b>Bước 1:</b> Chọn hệ Radian nhé các chế không sai luôn đấy 	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$
<b>Bước 2:</b> Nhập Biểu thức 	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$
<b>Bước 3:</b> Lưu luôn kết quả bằng  <b>Vậy chọn B</b>	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx \rightarrow A$

**Dạng 2: Tích phân chứa ẩn ở cận hoặc bắt đi tìm giá trị tham số**

**Ví dụ 1:** Tìm  $a > 0$  sao cho :  $I = \int_0^a x e^{\frac{x}{2}} dx = 4$

A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

**Cách 1:**

Thông thường a nguyên, ta thay lần lượt a=1, a=2 .... Vào xem

$$\int_0^1 x e^{\frac{x}{2}} dx = 0.7025574586 \quad \int_0^2 x e^{\frac{x}{2}} dx = 4$$

Vậy ta được a=2

**Cách 2:**

Để đỡ phải sửa nhiều lần thì các bạn sửa thành:

Đầu tiên gán 1 vào Y bằng cách:

$$1 \text{ [SHIFT] [RCL] [S+D]}$$

Sau đó sửa tích phân thành:

$$\int_0^Y x e^{\frac{x}{2}} dx = 0$$

Rồi bấm "=" xem KQ là bao nhiêu, sau đó các bạn lại gán 2 rồi 3... cho đến khi đúng kết quả như yêu cầu:

$$2 \text{ [SHIFT] [RCL] [S+D] [▲] [=]} \quad 2 \int_0^Y x e^{\frac{x}{2}} dx = 4$$

Như vậy đỡ phải đẩy con trỏ nhiều lần để sửa lại cận của tích phân.

**Ví dụ 1 nâng cao:** Tìm a>0 sao cho :  $I = \int_0^a x e^{\frac{x}{2}} dx = b$ . Biết  $b \in N$ , tính tổng a+b

- A. 2      B. 4      C. 6      D. 8

**Hướng dẫn:**

Những dạng này chúng ta thường phải dò nhưng trong Table thì không dùng tích phân và đạo hàm trực tiếp được nên ta phải dùng "vòng lặp" ở ngoài COMP

**Bước 1:** Các em thiết lập chương trình

$$\text{[ALPHA] [←] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [←] [+ ] 1 [ALPHA] [∫] [∫] [ALPHA] [→] [SHIFT] [In] [ALPHA] [→] [▼] 2 [▼] 0 [▲] [ALPHA] [←]}$$

$$A=A+1: \int_0^A x e^{\frac{x}{2}} dx$$

<b>Bước 2:</b> Ấn CALC rồi máy hỏi A? thì bấm 0=, máy hỏi X? thì bấm 0= Sau đó cứ ấn = tới khi thấy b nguyên	$\int_0^A x e^{\frac{x}{2}} dx$ 4
<b>Bước 3:</b> Ấn RCL A để thấy giá trị của tham số A Vậy chọn C.6	A 2

**Ví dụ 2:** Biết tích phân:  $\int_{-1}^0 \left( x+1+\frac{2}{x-1} \right) dx = a+b \ln 2$ . Tính a+b

A.  $\frac{3}{2}$

B.  $-\frac{3}{2}$

C.  $\frac{5}{2}$

D.  $-\frac{5}{2}$

Hướng dẫn :

<b>Bước 1:</b> Lưu kết quả tích phân vào A	$\int_{-1}^0 \left( x+1+\frac{2}{x-1} \right) dx \rightarrow -0.8862943611$
<b>Bước 2:</b> Dò a,b bằng Table theo tư duy như sau: + Dựa vào kết quả thấy lẻ tới 0.5 nên sẽ để step 0.5 Start 4= End 4= và Step 0.5=	$f(X) = \frac{A-X}{\ln(2)}$
<b>Bước 3:</b> Quan sát xem có cặp nào ra tổng như đáp án không Vậy là $a=0,5 \quad b=-2 \rightarrow a+b = \frac{-3}{2}$	$\begin{array}{ c } \hline 9 \\ \hline 10 \\ \hline 11 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline 0.5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline F(X) \\ \hline -1.278 \\ \hline -2.721 \\ \hline \end{array}$ -2

**Ví dụ 3.** Cho  $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = a - \frac{\pi}{b}$ . Khi đó

A.  $a > b$

B.  $a < b$

C.  $a = b$

D.  $ab = 1$

Hướng dẫn

<b>Bước 1:</b> Lưu kết quả tích phân vào A	$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx \rightarrow A$ 0.4292036732
<b>Bước 2:</b> Dò a,b bằng Table theo tư duy như sau: + Dựa vào kết quả thấy a, b nguyên và $a = A + \frac{\pi}{b}$ thay $b = X$ cho nó chạy để tìm a nguyên. Start -9= End 9= và Step 1=	$f(X) = A + \frac{\pi}{X}$



**Bước 3:** Quan sát xem có cặp nào ra số đẹp không  
Vậy là  $b=2$   $a=2 \rightarrow a=b$

**Ví dụ 4:** Biết tích phân:  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} + \frac{\pi}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). khi đó giá trị  $\sqrt[3]{a} + 2b$  bằng ?

A. 26 B. 28 C. 24 D. 20

**Bước 1:** Lưu kết quả tích phân vào A

**Bước 2:** Dò a, b bằng Table theo tư duy như sau:

+ Dựa vào kết quả thấy a, b nguyên và  $a = \frac{\sqrt{3}}{A - \frac{\pi}{b}}$  thay  $b = X$

cho nó chạy để tìm a nguyên. Start -14= End 14= và Step 1=

(Nhớ tắt G(X) đi để tính lên 29 thay vì 20 giá trị)

**Bước 3:** Quan sát xem có cặp nào ra số đẹp không  
Vậy là  $b=12$   $a=8 \rightarrow A$

**Cách 2: SOLVE**

+ Thử từng đáp án xem đáp án nào a ra nguyên:  $b = \frac{1}{2}(A, B, C, D - \sqrt[3]{a})$

Xét đáp án A:  $b = \frac{1}{2}(26 - \sqrt[3]{a})$  ta có phương trình:  $A = \frac{\sqrt{3}}{X} + \frac{\pi}{\frac{1}{2}(26 - \sqrt[3]{X})}$  nhập vào máy

X= 8  
L-R= 0

Được luôn kết quả đẹp, các đáp án khác em chỉ việc sửa số 26.

**Ví dụ 4:** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2x+2) \cos x dx = \frac{\pi + a\sqrt{3} - b}{c}$ . Khi đó  $2a - b + c = ?$

A. 0 B. 8 C. 12 D. 24

<b>Bước 1:</b> Lưu kết quả tích phân vào A	<div><div><div><math>\int_0^{\pi/6} (2X+2)\cos(X) dX</math></div><div>1.255649583</div></div><div>Math</div></div>
<b>Bước 2:</b> Dò a,b bằng Table theo tư duy như sau: + Dựa vào kết quả thấy a, b, c nguyên dương và $a = \frac{cA - \pi + b}{\sqrt{3}}$ thay $b = X$ và thay $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ cho nó chạy để tìm a nguyên. Start -9= End = và Step 1=	<div><div><div><math>f(X) = \frac{1 \times A - \pi + X}{\sqrt{3}}</math></div><div>Math</div></div></div>
<b>Bước 3:</b> Quan sát xem có cặp nào ra số đẹp không Vậy là $a = b = c = 6 \rightarrow C$	<div><div><div><math>f(X) = \frac{6 \times A - \pi + X}{\sqrt{3}}</math></div><div>Math</div></div></div>

**Ví dụ 5:** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ) Tính  $a + b + c$

A. -3

B. -2

C. 2

D. 1

(Dạng bài mà các giáo viên khác cho là chống Casio)

**Hướng dẫn**

<p><b>Bước 1:</b> Lưu kết quả tích phân vào A</p>	$A$ $0.8903717579$
<p><b>Bước 2:</b> Dò a,b bằng Table theo tư duy như sau: + Dựa vào kết quả thấy a, b, c có thể âm hoặc dương và <math>a = \frac{A - c - b \ln 3}{\ln 2}</math> thay <math>b = X</math> và thay <math>c = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots</math> cho nó chạy để tìm a nguyên. Start -9= End = và Step 1=</p>	$f(X) = \frac{A - 1 - X \ln(3)}{\ln(2)}$
<p><b>Bước 3:</b> Quan sát xem có cặp nào ra số đẹp không Vậy là <math>b = 2, a = 1, c = -2 \rightarrow D</math></p>	$f(X) = \frac{A + 2 - X \ln(3)}{\ln(2)}$

--	--

**Ví dụ 6:** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cdot \sin 2x dx = a + b\sqrt{e}; a, b \in \mathbb{Z}$  Khẳng định nào đúng ?

- A.  $2a = b$     B.  $a = -2b$     C.  $a = b$     D.  $a = -b$

**Hướng dẫn**

<b>Bước 1:</b> Lưu kết quả tích phân vào A	
<b>Bước 2:</b> Dò a,b bằng Table theo tư duy như sau: $b = \frac{A-a}{\sqrt{e}} = \frac{A-X}{\sqrt{e}}$ Start -9= End 9= và Step 1=	
<b>Bước 3:</b> Quan sát xem có cặp nào ra số đẹp không Vậy là $a=2, b=-1 \rightarrow B$	

**Ví dụ 7:** Cho  $\int_1^2 (x^2 + x) \ln x dx = \frac{a}{3} \ln 2 - \frac{b}{c}; a, b, c \in \mathbb{N}, \frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $S = ab + c$

A.806

B.818

C. 1024

D. 512

<b>Bước 1:</b> Lưu kết quả tích phân vào A	
<b>Bước 2:</b> Dò bằng Table theo tư duy như sau: $\frac{b}{c} = \frac{a}{3} \ln 2 - A$ Start -14= End 14= và Step 1=	
<b>Bước 3:</b> Quan sát xem có cặp nào ra số đẹp không Vậy là $a=14, b=55, c=36 \rightarrow A$	

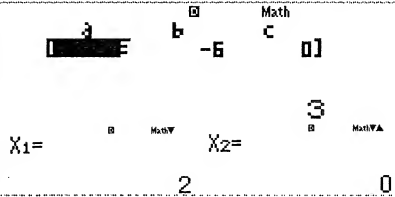
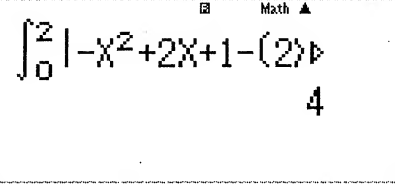
**Dạng 2: Ứng dụng tính diện tích hình phẳng (Cách tính tích phân chứa giá trị tuyệt đối)**

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số có phương trình:

$$y = -x^2 + 2x + 1, y = 2x^2 - 4x + 1$$

Hướng dẫn :

<b>Bước 1:</b> Tìm hoành độ giao điểm (Bậc 2 và 3 thì cứ dùng EQN cho nhanh còn không thì các em dùng Solve)	
<b>Bước 2:</b> nhập biểu thức $\int_0^2   -x^2 + 2x + 1 - (2x^2 - 4x + 1)   dx$	
<b>Bước 3:</b> Chọn đáp án đúng	

**Dạng 3: Ứng dụng tính thể tích khối tròn xoay  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$** 

**Ví dụ 1:** Cho (H) là miền kín giới hạn bởi các đường:  $y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}$  (L), trục Ox và  $x = 1$ .

Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo ra khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A.  $\frac{1}{3}(\ln 2 - 1)\pi$     B.  $\frac{1}{3}(\ln 2 + 1)\pi$     C.  $\frac{1}{3}(2\ln 2 - 1)\pi$     D.  $\frac{1}{3}(2\ln 2 + 1)\pi$

Đầu tiên thì các em cũng phải tìm giao điểm sau đó tính theo công thức

Các em tính thông thường như là ở dạng đầu tiên chủ yếu nhập đúng công thức thôi

$\int_0^1 x^2 \ln(1+x^3) dx$	Ans→A	$A - \frac{1}{3}(2\ln(2) - 1)$
0.128764787	0.128764787	0

### Casio xử đẹp tích phân hạn chế casio

Như ở phần trước thì anh đã hướng dẫn một số ví dụ khó bấm casio theo hình thức cơ bản thì ở phần này chúng ta sẽ tập trung đào sâu hơn các dạng toán này.

**Ví dụ 1:** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx = a\pi + b, (a, b \in \mathbb{Q})$  Tính giá trị biểu thức  $S = a + b$

A.  $-\frac{5}{32}$

B.  $\frac{11}{32}$

C. 4

D. 7

Hướng dẫn

Lưu giá trị tích phân vào A như trước

$$\int_0^{\pi/4} \sin(X)^4 dx \rightarrow A$$

0.04452431127

Tiến hành giải hệ phương trình

MODE 5 1

SHIFT  $\times 10^x$  = 1 = ALPHA (-) = 1 = 1 = - 5 = 3 2 = =

X= 0.09375 Y= -0.25

Vậy đáp án A đúng

**Ví dụ 2:** Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả  $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$  ?

A.  $ab = 64$

B.  $ab = 46$

C.  $a - b = 12$

D.  $a - b = 4$

Hướng dẫn

$$\int_1^e X^3 \ln(X) dx \rightarrow A$$

10.29965313

$$A = \frac{3e^a + 1}{b} \rightarrow b = \frac{3e^a + 1}{A} \text{ xét đáp án A ta có phương trình : } a \cdot \frac{3e^a + 1}{A} = 64$$

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\times} \boxed{\frac{\square}{\square}} \boxed{3} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\ln} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\nabla} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{(\rightarrow)} \boxed{\rightarrow} \boxed{-} \boxed{6} \boxed{4}$   
 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$

$$X \times \frac{3e^X + 1}{A} = 64$$

$$X \times \frac{3e^X + 1}{A} = 64$$

$$X = 4$$

$$L - R = 0$$

**Ví dụ 3:** Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = a + b\sqrt{3} (a, b \in \mathbb{Q})$ . Tính giá trị của biểu thức

$$A = a + b$$

A. -2

B.  $-\frac{2}{3}$

C.  $\frac{2}{3}$

D. 3

Hướng dẫn:

Dùng Table : start  $-\pi/3$ , end  $\pi/3$ , step  $1/3$  =

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(2X)}{\cos(X)^2 \sin(X)^2} dx = -0.3094010768$$

$$f(X) = \frac{A-X}{\sqrt{3}}$$

X	f(X)
1.5708	-1.1414
2.3562	-1.5255
3.1416	-1.3333

**Ví dụ 4:** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left( \sin x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}} \right) dx = a\pi - \frac{b}{c}; a, b, c \in \mathbb{Q}, \frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức  $S = a + b + c$

A. 153,5

B. 523,25

C. 320,75

D. 223,25

Hướng dẫn

$$\int_0^{\pi/2} \sin(X) \left( \sin(X) + \frac{\cos(2X)}{\sqrt{1+3\cos(X)}} \right) dx = 0.4940401387$$

Để ý vào đáp án B,C thì lẽ tới 0.25 thông thường  $\frac{b}{c}$  tối giản thì b,c nguyên dương nên rõ ràng a là số lẻ tới 0.25 nên a có thể là 0.25, 1.25 .... Từ đó ta sẽ dùng SOLVE để giải phương trình tìm b,c xem sao

Xét đáp án B:  $a+b+c=523.5 \rightarrow c=523.25-a-b$  với  $a=0.25$  có phương trình

$$A=0.25\pi - \frac{523.25}{\pi} \rightarrow A=U.25\pi - \frac{523.25}{\pi}$$

$$X=118$$

$$L-R=0$$

Nếu không được các em lại xét  $a=1.25, 2.25$  không được ta chuyển sang đáp án D.

Ngoài ra nếu em đang dùng máy Vinacal thì dùng Table dò cũng khá là nhanh

Start -2=, End 2=, step 0.25=

**Ví dụ 5:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2\cos x}{2+3\sin x - \cos 2x} dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Tính giá trị của biểu thức  $A = a+b+c$

A. -3

B. -2

C. 2

D. 1

### Hướng dẫn

Các em cứ thay đổi giá trị c rồi dò như 2 biến anh đã hướng dẫn

### Rèn luyện Tích Phân

**Câu 1.** Tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$  bằng:

- A.  $I = \frac{1}{2}$ .      B.  $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ .      C.  $\frac{e^2 + 1}{4}$ .      D.  $\frac{e^2 - 1}{4}$ .

**Câu 2.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$

- A.  $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$ .      B.  $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{3}$ .      C.  $24 \ln 2 - 7$ .      D.  $8 \ln 2 - \frac{7}{3}$ .

**Câu 3.** Biết  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln T$ . Giá trị của  $T$  là

- A.  $T = \sqrt{3}$ .      B.  $T = 9$ .      C.  $T = 3$ .      D.  $T = 81$ .

**Câu 4.** Xét tích phân  $A = \int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$ . Giá trị của  $e^A$  bằng?

- A. 12.      B.  $\frac{4}{3}$ .      C.  $\frac{3}{4}$ .      D.  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 5.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  và  $F(2) = 1$ . Tính  $F(3)$ .

- A.  $F(3) = \ln 2 - 1$ .      B.  $F(3) = \ln 2 + 1$ .      C.  $F(3) = \frac{1}{2}$ .      D.  $F(3) = \frac{7}{4}$ .

**Câu 6.** Cho  $\int_0^4 f(x) dx = 16$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(2x) dx$ .

- A.  $I = 32$ .      B.  $I = 8$ .      C.  $I = 16$ .      D.  $I = 4$ .

**Câu 7.** Biết  $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 6$ .      B.  $S = 2$ .      C.  $S = -2$ .      D.  $S = 0$ .

**Câu 8.** Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  và  $F(2) = 1$ . Tính  $F(3)$ .

- A.  $\ln 2 + 1$ .      B.  $\frac{1}{2}$ .      C.  $\ln \frac{3}{2}$ .      D.  $\ln 2$ .



**Câu 9.** Cho  $\int_{-1}^5 f(x)dx = 5$ ,  $\int_4^5 f(t)dt = -2$  và  $\int_{-1}^4 g(u)du = \frac{1}{3}$ . Tính  $\int_{-1}^4 (f(x) + g(x))dx$  bằng:

A.  $\frac{8}{3}$ .                      B.  $\frac{10}{3}$ .                      C.  $\frac{22}{3}$ .                      D.  $\frac{-20}{3}$ .

**Câu 10.** Cho biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + b \ln 2$  với  $a$  và  $b$  là các số hữu tỉ. Khi đó  $\frac{a}{b}$  bằng:

A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{3}{8}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 11.** Cho  $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$ . Tính  $I = \int_2^4 f(y)dy$ .

A.  $I = -5$ .                      B.  $I = -3$ .                      C.  $I = 3$ .                      D.  $I = 5$ .

**Câu 12.** Biết  $\int_0^2 e^x(2x + e^x)dx = a.e^4 + b.e^2 + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b + c$ .

A.  $S = 2$ .                      B.  $S = -4$ .                      C.  $S = -2$ .                      D.  $S = 4$ .

**Câu 13.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của của hàm số  $f(x) = 2x - 3\cos x$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ . Giá trị  $F(\pi)$  là

A.  $F(\pi) = \pi^2 - 3$ .                      B.  $F(\pi) = \pi^2 + 3$ .                      C.  $F(\pi) = \pi + 3$ .                      D.  $F(\pi) = \pi - 3$ .

**Câu 14.** Tính tích phân:  $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$  được kết quả  $I = a \ln 3 + b \ln 5$ . Tổng  $a + b$  là

A. 2.                      B. 3.                      C. -1.                      D. 1.

**Câu 15.** Biết  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 4$ . Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(2x) - \sin x]dx$  bằng

A.  $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 16.** Biết  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^6 f(x)dx = 4$ ,  $\int_2^6 f(t)dt = -3$ . Khi đó  $\int_0^2 [f(v) - 3]dv$  bằng

A. 1.                      B. 2.                      C. 4.                      D. 3.

**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1;4]$ ,  $f(1)=1$  và  $\int_1^4 f'(x)dx = 2$ . Giá trị  $f(4)$  là

- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 4.

**Câu 18.** Giả sử  $\int_1^2 \frac{4\ln x + 1}{x} dx = a\ln^2 2 + b\ln 2$ , với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Khi đó, tổng  $4a+b$  bằng:

- A. 3.                      B. 5.                      C. 7.                      D. 9.

**Câu 19.** Trong các tích phân sau, tích phân nào **không** có cùng giá trị với  $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$ ?

- A.  $\frac{1}{2} \int_1^2 t\sqrt{t-1} dt$ .      B.  $\frac{1}{2} \int_1^4 t\sqrt{t-1} dt$ .      C.  $\int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)t^2 dt$ .      D.  $\int_0^{\sqrt{3}} (x^2+1)x^2 dx$ .

**Câu 20.** Có bao nhiêu số nguyên dương  $n$  sao cho  $n\ln n - \int_1^n \ln x dx$  có giá trị không vượt quá 2017?

- A. 2017.                      B. 2018.                      C. 4034.                      D. 4036.

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_{-2}^4 f(x)dx = 2$ . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.  $\int_{-1}^2 f(2x)dx = 2$ .      B.  $\int_{-3}^3 f(x+1)dx = 2$ .      C.  $\int_{-1}^2 f(2x)dx = 1$ .      D.  $\int_0^6 \frac{1}{2} f(x-2)dx = 1$ .

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trên  $[2; 4]$ . Biết  $f'(2)=1$ ,  $f'(4)=5$ . Tính  $I = \int_2^4 f''(x)dx$ , kết quả là

- A. 4.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 1.

**Câu 23.** Biết  $\int_0^2 \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{a} \ln b$  thì  $a^2 + b$  là:

- A. 12.                      B. 10.                      C. 2.                      D. 14.

**Câu 24.** Biết  $\int \frac{\cos x}{5\sin x - 9} dx = \frac{a}{b} \ln|5\sin x - 9| + C$ . Giá trị  $2a-b$  là

- A. 10.                      B. -4.                      C. 7.                      D. -3.

**Câu 25.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$  và  $F(1) = \frac{1}{3}$ . Tính  $[F(e)]^2$ .

- A.  $[F(e)]^2 = \frac{8}{3}$ .      B.  $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$ .      C.  $[F(e)]^2 = \frac{1}{3}$ .      D.  $[F(e)]^2 = \frac{1}{9}$ .

**Câu 26.** Biết  $\int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Tính  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 1$ .      B.  $S = 0$ .      C.  $S = -1$ .      D.  $S = 2$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ ,  $f(1) = 1$ . Tính  $f(5)$ .

- A.  $f(5) = \frac{1}{2} \ln 3$ .      B.  $f(5) = \ln 2$ .      C.  $f(5) = \ln 3 + 1$ .      D.  $f(5) = 2 \ln 3 + 1$ .

**Câu 28.** Biết  $\int_1^{\sqrt{3}} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{2}{3}(a - \sqrt{b})$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a = 2b$ .      B.  $a < b$ .      C.  $a = b$ .      D.  $a = 3b$ .

**Câu 29.** Tìm  $m$  để  $\int_0^1 e^x (x+m) dx = e$ .

- A.  $m = 0$ .      B.  $m = e$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = \sqrt{e}$ .

**Câu 30.** Cho biết  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + b \ln 2$ , với  $a$  và  $b$  là các số hữu tỉ. Khi đó tỉ số  $\frac{a}{b}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{4}$ .      B.  $\frac{3}{4}$ .      C.  $\frac{3}{8}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 31.** Biết  $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ , với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - b$ .

- A.  $S = 9$ .      B.  $S = 11$ .      C.  $S = 5$ .      D.  $S = -3$ .

**Câu 32.** Tìm tất cả các số thực  $m$  dương thỏa mãn  $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$ :

- A.  $m = 3$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m > 3$ .

**Câu 33.** Kết quả tích phân  $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx$  được viết dưới dạng  $I = ae + b$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

- A.  $a^3 + b^3 = 28$ .      B.  $a + 2b = 1$ .      C.  $a - b = 2$ .      D.  $ab = 3$ .

**Câu 34.** Xét tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$ . Nếu đặt  $t = \sqrt{1 + \cos x}$ , ta được:

- A.  $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt$ .      B.  $I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$ .      C.  $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dx$ .      D.  $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1) dx$ .

**Câu 35.** Biết hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(0) = \frac{\pi}{2}$  và  $\int_0^{\pi} f'(x) dx = 2\pi$ . Tính  $f(\pi)$ .

- A.  $f(\pi) = \frac{3\pi}{2}$ .      B.  $f(\pi) = 2\pi$ .      C.  $f(\pi) = \frac{5\pi}{2}$ .      D.  $f(\pi) = 3\pi$ .

**Câu 36.** Biết  $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \frac{1}{2} + \ln \frac{a}{b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

Tính  $a + b$ .

- A.  $a + b = 7$ .      B.  $a + b = 5$ .      C.  $a + b = 9$ .      D.  $a + b = 4$ .

**Câu 37.** Biết  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6+x^3}} dx = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$  với  $a, b, c, d$  là các số nguyên. Tính

$a + b + c + d$ .

- A.  $a + b + c + d = 28$ .      B.  $a + b + c + d = 16$ .      C.  $a + b + c + d = 14$ .      D.  $a + b + c + d = 22$ .

**Câu 38.** Tích phân  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1} + 1}{e^x} dx = e + \frac{a}{b}$ . Tính tích  $a.b$ .

- A. 1.      B. 2.      C. 6.      D. 12.

**Câu 39.** Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = a\pi + b \ln 2$ , với  $a, b$  là các số thực. Tính  $16a - 8b$

- A. 4.      B. 5.      C. 2.      D. 3.

**Câu 40.** Biết rằng:  $\int_0^{\ln 2} \left( x + \frac{1}{2e^x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln^a 2 + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ . Trong đó  $a, b, c$  là những số nguyên. Khi đó  $S = a + b - c$  bằng:

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

**Câu 41.** Biết rằng  $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ .

- A.  $T = 6$ .                      B.  $T = 9$ .                      C.  $T = 10$ .                      D.  $T = 5$ .

**Câu 42.** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn  $[-6; 6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$  và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Tính } \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

- A.  $I = 11$ .                      B.  $I = 5$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = 14$ .

**Câu 43.** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Khi đó tính giá trị của  $a - b$ .

- A.  $-\frac{1}{6}$ .                      B. 0.                      C.  $-\frac{3}{10}$ .                      D.  $\frac{1}{5}$ .

**Câu 44.** Biết  $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$ , ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Khi đó:  $a + 2b$ .

- A. 0.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 7.

**Câu 45.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}$  (với  $\alpha > 1$ ) thì giá trị của  $I$  bằng:

- A. 2.                      B.  $\frac{\alpha}{2}$ .                      C.  $2\alpha$ .                      D.  $\frac{2}{\alpha}$ .

**Câu 46.** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^1 f(x) dx = 2017$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$ .

- A.  $\frac{2}{2017}$ .                      B.  $\frac{2017}{2}$ .                      C. 2017.                      D.  $-\frac{2017}{2}$ .

**Câu 47.** Giả sử  $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ) Tính giá trị biểu thức  $S = -2a + b + 3c^2$ .

- A.  $S = 3$ .                      B.  $S = 6$ .                      C.  $S = 0$ .                      D.  $S = -2$ .

**Câu 48.** Giả sử tích phân  $\int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$ . Với phân số  $\frac{b}{c}$  tối giản. Lúc đó

- A.  $b+c=6057$ .                      B.  $b+c=6059$ .                      C.  $b+c=6058$ .                      D.  $b+c=6056$ .

**Câu 49.** Giả sử tích phân  $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a+b \ln 3 + c \ln 5$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó:

- A.  $a+b+c = \frac{4}{3}$ .                      B.  $a+b+c = \frac{5}{3}$ .                      C.  $a+b+c = \frac{7}{3}$ .                      D.  $a+b+c = \frac{8}{3}$ .

**Câu 50.** Số các số nguyên  $m \in (0; 2017)$  thỏa mãn  $\int_0^m \cos 2x dx = 0$  là

- A. 643.                      B.  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .                      C. 1285.                      D. 642.

**Câu 51.** Cho  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} (2\sqrt{x^2+1}+5)$ , biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thỏa

$F(0) = 6$ . Tính  $F\left(\frac{3}{4}\right)$ .

- A.  $\frac{125}{16}$ .                      B.  $\frac{126}{16}$ .                      C.  $\frac{123}{16}$ .                      D.  $\frac{127}{16}$ .

**Câu 52.** Biết rằng  $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $2a+b+c=-1$ .                      B.  $a+2b+c=0$ .                      C.  $a-b+c=0$ .                      D.  $a+b+c=1$ .

**Câu 53.** Để hàm số  $f(x) = a \sin \pi x + b$  thỏa mãn  $f(1) = 2$  và  $\int_0^1 f(x) dx = 4$  thì  $a, b$  nhận giá trị:

- A.  $a = \pi, b = 0$ .                      B.  $a = \pi, b = 2$ .                      C.  $a = 2\pi, b = 2$ .                      D.  $a = 2\pi, b = 3$ .

**Câu 54.** Giải phương trình  $\int_0^2 (t - \log_2 x) dt = 2 \log_2 \frac{2}{x}$  (ẩn  $x$ ).

- A.  $x = 1$ .                      B.  $x \in \{1; 4\}$ .                      C.  $x \in (0; +\infty)$ .                      D.  $x \in \{1; 2\}$ .

**Câu 55.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $a$  để bất phương trình sau đây nghiệm đúng với

mọi giá trị thực của  $x$   $\int_0^x \left( \frac{1}{2}t + 2(a+1) \right) dt \geq -1$ .

A.  $a \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ .      B.  $a \in [0; 1]$ .      C.  $a \in [-2; -1]$ .      D.  $a \leq 0$ .

**Câu 56.** Với  $a, b$  là các tham số thực. Giá trị tích phân  $\int_0^b (3x^2 + 2ax + 1) dx$  bằng

A.  $3b^2 + 2ab$ .      B.  $b^3 + b^2a + b$ .      C.  $b^3 + b$ .      D.  $a + 2$ .

**Câu 57.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$  và

$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cos x dx = 2$ . Tích phân  $I = \int_0^3 f(x) dx$  bằng

A.  $I = 2$ .      B.  $I = 6$ .      C.  $I = 4$ .      D.  $I = 10$ .

**Câu 58.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 16$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$ .

A. 13.      B. 12.      C. 20.      D. 7.

**Câu 59.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và các tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$  và  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$ .

Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

A.  $I = 6$ .      B.  $I = 2$ .      C.  $I = 3$ .      D.  $I = 1$ .

**Câu 60.** Cho  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  và  $\int_0^a x \tan x dx = m$ . Tính  $I = \int_0^a \left( \frac{x}{\cos x} \right)^2 dx$  theo  $a$  và  $m$ .

A.  $I = a \tan a - 2m$ .      B.  $I = -a^2 \tan a + m$ .      C.  $I = a^2 \tan a - 2m$ .      D.  $I = a^2 \tan a - m$ .

**Câu 61.** Biết  $\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} dx = a \ln 7 + b \ln 3 + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $T = a + 2b^2 + 3c^3$ .

A.  $T = 4$ .      B.  $T = 6$ .      C.  $T = 3$ .      D.  $T = 5$ .

**Câu 62.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\int_0^2 f(x^2) x dx = 1$ , hãy tính  $I = \int_0^4 f(x) dx$ .

A.  $I = 2$ .      B.  $I = 4$ .      C.  $I = \frac{1}{2}$ .      D.  $I = 1$ .

Câu 63. Biết  $\int_1^e \frac{1}{x^3+x} dx = a \ln(e^2+1) + b \ln 2 + c$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Tính  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 1$ . B.  $S = -1$ . C.  $S = 0$ . D.  $S = 2$ .

Câu 64. Tính tích phân  $\int_1^{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} (a\sqrt{3}+b+c\pi) + 4$ . Với  $a, b, c$  là các số nguyên. Khi đó biểu thức  $a+b^2+c^4$  có giá trị bằng

- A. 20. B. 241. C. 196. D. 48.

Câu 65. Cho các số thực  $m, n$  thỏa mãn  $\int_a^1 (1-x) dx = m$  và  $A$  trong đó  $B'$  và  $C$  Tính  $B$ .

- A.  $C'$ . B.  $D$ . C.  $z$ . D.  $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i}$ .

Câu 66. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[-1; +\infty)$  và  $\int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 4$ . Tính  $I = \int_1^2 x.f(x) dx$ .

- A.  $I = 8$ . B.  $I = 4$ . C.  $I = 16$ . D.  $I = 2$ .

Câu 67. Cho  $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b$ , ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $(a+3)^b$ .

- A. 25. B.  $\frac{1}{7}$ . C. 16. D.  $\frac{1}{9}$ .

1.C	2.A	3.C	4.B	5.B	6.B	7.B	8.A	9.C	10.C
11.A	12.D	13.B	14.D	15.C	16.A	17.B	18.D	19.A	20.B
21.A	22.C	23.D	24.D	25.B	26.B	27.C	28.A	29.C	30.D
31.B	32.C	33.B	34.D	35.C	36.A	37.A	38.B	39.A	40.C
41.C	42.D	43.B	44.C	45.D	46.B	47.B	48.B	49.A	50.B
51.A	52.C	53.B	54.C	55.A	56.B	57.C	58.D	59.A	60.C
61.A	62.A	63.A	64.B	65.D	66.D	67.C			



### Ứng Dụng Tích Phân Tính Diện Tích – Thể Tích

**Câu 1.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $y = 2 - x^2$  là:

- A.  $2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ .    B.  $2 \int_0^1 (1 - x^2) dx$ .    C.  $2 \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$ .    D.  $2 \int_0^1 (x^2 - 1) dx$ .

**Câu 2.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x^2 + x - 1$  và đường thẳng  $y = 2x + 1$  là

- A.  $\frac{9}{2}$ .    B. 4.    C.  $\frac{11}{2}$ .    D. 3.

**Câu 3.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^3$ ,  $y = 2 - x$  và  $y = 0$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x - 2) dx$ .    B.  $S = \left| \int_0^2 (x^3 + x - 2) dx \right|$ .    C.  $S = \frac{1}{2} + \int_0^1 x^3 dx$ .    D.  $S = \int_0^1 |x^3 - (2 - x)| dx$ .

**Câu 4.** Tính diện tích hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi hai đồ thị  $y = 3^x$ ,  $y = 4 - x$  và trục tung.

- A.  $S = \frac{9}{2} + \frac{2}{\ln 3}$ .    B.  $S = \frac{9}{2} + \frac{3}{\ln 3}$ .    C.  $S = \frac{7}{2} - \frac{3}{\ln 3}$ .    D.  $S = \frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3}$ .

**Câu 5.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x$ ,  $y = x + \sin^2 x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ .

- A.  $S = \pi$ .    B.  $S = \pi - \frac{1}{2}$ .    C.  $S = \pi - 1$ .    D.  $S = \frac{\pi}{2}$ .

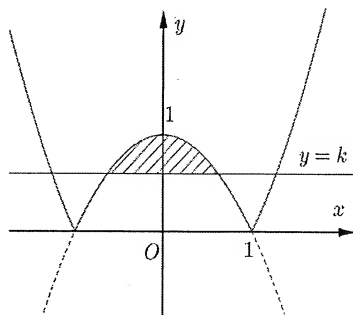
**Câu 6.** Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = 1$ .

- A.  $V = \frac{8\pi}{15}$ .    B.  $V = \frac{7\pi}{8}$ .    C.  $V = \frac{8\pi}{7}$ .    D.  $V = \frac{15\pi}{8}$ .

**Câu 7.** Cho hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi các đường  $y = |x^2 - 1|$  và  $y = k$ ,  $0 < k < 1$ . Tìm  $k$  để diện tích của hình phẳng ( $H$ ) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.

- A.  $k = \sqrt[3]{4}$ .    B.  $k = \sqrt[3]{2} - 1$ .

- C.  $k = \frac{1}{2}$ .    D.  $k = \sqrt[3]{4} - 1$ .



**Câu 8.** Parabol  $y = \frac{x^2}{2}$  chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng  $2\sqrt{2}$  thành hai phần có diện tích là  $S_1$  và  $S_2$ , trong đó  $S_1 < S_2$ . Tìm tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$ .

- A.  $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$ .      B.  $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$ .      C.  $\frac{3\pi+2}{12\pi}$ .      D.  $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$ .

**Câu 9.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $x = y^2$  quay quanh trục  $Ox$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{3\pi}{10}$ .      B.  $10\pi$ .      C.  $\frac{10\pi}{3}$ .      D.  $3\pi$ .

**Câu 10.** Cho parabol  $(P): y = x^2 + 1$  và đường thẳng  $d: y = mx + 2$ . Biết rằng tồn tại  $m$  để diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(P)$  và  $d$  đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

- A.  $S = 0$ .      B.  $S = \frac{4}{3}$ .      C.  $S = \frac{2}{3}$ .      D.  $S = 4$ .

**Câu 11.** Cho hình  $(H)$  giới hạn bởi đồ thị  $(C): y = x \ln x$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = e$ . Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  quanh trục hoành.

- A.  $\frac{3}{2}\pi$ .      B.  $-\frac{5}{2}e^3 + \ln 64\pi$ .      C.  $(-4 + \ln 64)\pi$ .      D.  $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$ .

**Câu 12.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = k$  ( $k > 1$ ). Tìm  $k$  để diện tích hình phẳng  $(H)$  bằng 1.

- A.  $k = 2$ .      B.  $k = e^3$ .      C.  $k = e^2$ .      D.  $k = e$ .

**Câu 13.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = e$  là

- A. 0.      B. 1.      C.  $e$ .      D.  $\frac{1}{e}$ .

**Câu 14.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y^2 = 4x$  và đường thẳng  $x = 1$  bằng  $S$ . Giá trị của  $S$  là

- A. 1.      B.  $\frac{3}{8}$ .      C.  $\frac{8}{3}$ .      D. 16.

**Câu 15.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhánh đường cong  $y = x^2$  với  $x \geq 0$ , đường thẳng  $y = 2 - x$  và trục hoành bằng

- A. 2.                      B.  $\frac{7}{6}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{5}{6}$ .

**Câu 16.** Tính diện tích  $S$  của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  và trục hoành.

- A.  $S = \frac{13}{2}$ .                      B.  $S = \frac{29}{4}$ .                      C.  $S = -\frac{27}{4}$ .                      D.  $S = \frac{27}{4}$ .

**Câu 17.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 17x - 3$  và  $y = x^2 + 3x + 5$

- A. 3.                      B.  $\frac{37}{12}$ .                      C.  $\frac{13}{14}$ .                      D.  $\frac{75}{24}$ .

**Câu 18.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{4-x^2}$  và  $y^2 = 6-3x$  bằng:

- A.  $\frac{2\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{6}$ .                      B.  $\frac{\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{6}$ .                      C.  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ .                      D.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 19.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2$ ;  $y = 0$ ;  $x = 2$ . Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(H)$  quanh trục  $Ox$ .

- A.  $V = \frac{32\pi}{5}$ .                      B.  $V = \frac{32}{5}$ .                      C.  $V = \frac{8\pi}{3}$ .                      D.  $V = \frac{8}{3}$ .

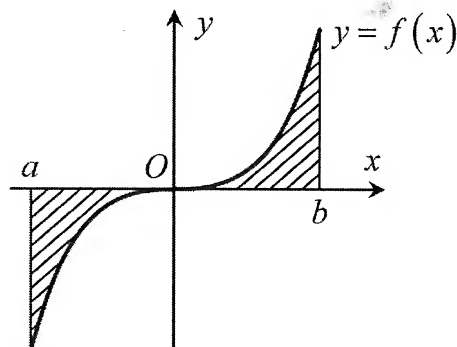
**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C): y = f(x)$ , trục hoành, hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  (như hình vẽ bên dưới). Giả sử  $S_D$  là diện tích của hình phẳng  $D$ . Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D dưới đây?

A.  $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$ .

B.  $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$ .

C.  $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$ .

D.  $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$ .



**Câu 21.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi  $(C): y = x^3; d: y = -x + 2; Ox$ . Quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích là:

- A.  $\frac{\pi}{7}$ .      B.  $\frac{10\pi}{21}$ .      C.  $\frac{\pi}{3}$ .      D.  $\frac{4\pi}{21}$ .

**Câu 22.** Cho hình  $(H)$  giới hạn bởi đường  $y = -x^2 + 2x$  và trục hoành. Quay hình  $(H)$  quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích là

- A.  $\frac{4\pi}{3}$ .      B.  $\frac{32\pi}{15}$ .      C.  $\frac{496\pi}{15}$ .      D.  $\frac{16\pi}{15}$ .

**Câu 23.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi  $y = 2x - x^2, y = 0$ . Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  ta được  $V = \pi \left( \frac{a}{b} + 1 \right)$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a, b$ .

- A.  $a = 1, b = 15$ .      B.  $a = -7, b = 15$ .      C.  $a = 241, b = 15$ .      D.  $a = 16, b = 15$ .

**Câu 24.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 5, y = 6x, x = 0, x = 1$ . Tính  $S$ .

- A.  $\frac{4}{3}$ .      B.  $\frac{7}{3}$ .      C.  $\frac{8}{3}$ .      D.  $\frac{5}{3}$ .

**Câu 25.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $2my = x^2, mx = \frac{1}{2}y^2, (m > 0)$ . Tìm giá trị của  $m$  để  $S = 3$ .

- A.  $m = \frac{3}{2}$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = 3$ .      D.  $m = \frac{1}{2}$ .

**Câu 26.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số  $y = x^3 + 11x - 6; y = 6x^2; x = 0; x = 2$  có kết quả là  $\frac{a}{b}$  trong đó  $a$  và  $b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  tối giản. Khi đó giá trị  $a - b$  bằng

- A. 3.      B. -3.      C. 2.      D. 59.

**Câu 27.** Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong  $y = x^2$  và  $y = x^3$  là

- A.  $\frac{1}{6}$ .      B.  $\frac{1}{8}$ .      C.  $\frac{1}{4}$ .      D.  $\frac{1}{12}$ .

**Câu 28.** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = 2, y \geq 0$  và parabol  $y = x^2$  bằng

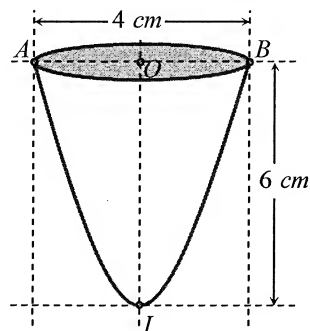
A.  $\frac{\pi}{2} - 1$ .

B.  $\frac{1}{3}$ .

C.  $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ .

D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 29.** Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là  $4\text{ cm}$  và chiều cao là  $6\text{ cm}$ . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích  $V(\text{cm}^3)$  của vật thể đã cho.



A.  $V = 12\pi$ .

B.  $V = 12$ .

C.  $V = \frac{72}{5}\pi$ .

D.  $V = \frac{72}{5}$ .

**Câu 30.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{\ln x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  và  $x = k$  ( $k > 1$ ). Gọi  $V_k$  là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình  $(H)$  quay trục  $Ox$ . Biết rằng  $V_k = \pi$ , hãy chọn khẳng định đúng?

A.  $3 < k < 4$ .

B.  $1 < k < 2$ .

C.  $2 < k < 3$ .

D.  $4 < k < 5$ .

**Câu 31.** Biết rằng hình thang cong  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ ,  $x = k$ ,  $x = 3$  ( $k < 2$ ) và có diện tích bằng  $S_k$ . Xác định giá trị của  $k$  để  $S_k = 16$ .

A.  $k = 2 - \sqrt{31}$ .

B.  $k = 2 + \sqrt{31}$ .

C.  $k = 2 + \sqrt{15}$ .

D.  $k = 2 - \sqrt{15}$ .

**Câu 32.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = ax^3$  ( $a > 0$ ), trục hoành và hai đường thẳng  $x = -1$ ,  $x = k$  ( $k > 0$ ) bằng  $\frac{15a}{4}$ . Tìm  $k$ .

A.  $k = 1$ .

B.  $k = \frac{1}{4}$ .

C.  $k = \frac{1}{2}$ .

D.  $k = 2$ .

**Câu 33.** Cho  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = -2\sqrt{x}$ ,  $y = x$  và  $x = 5$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  bằng bao nhiêu?

A.  $V = \frac{125\pi}{3}$ .

B.  $V = \frac{25\pi}{3}$ .

C.  $V = \frac{39\pi}{6}$ .

D.  $V = \frac{157\pi}{3}$ .

**Câu 34.** Tính diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong  $y = x^3 - x$  và  $y = x - x^2$ .

A.  $S = \frac{12}{37}$ .

B.  $S = \frac{37}{12}$ .

C.  $S = \frac{9}{4}$ .

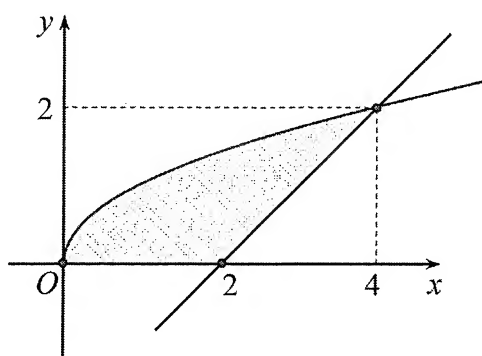
D.  $S = \frac{19}{6}$ .

Câu 35. Kí hiệu  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \tan x$ , hai đường thẳng  $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$  và trục hoành. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay  $(H)$  xung quanh trục hoành

- A.  $\pi \left( \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right)$ .      B.  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .      C.  $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ .      D.  $\pi \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$ .

Câu 36. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là:

- A.  $\frac{22}{3}$ .      B. 2.      C.  $\frac{16}{3}$ .      D.  $\frac{10}{3}$ .



Bảng Đáp Án

1.C	2.A	3.C	4.D	5.D	6.A	7.D	8.B	9.A	10.B
11.D	12.D	13.B	14.C	15.D	16.D	17.B	18.A	19.A	20.B
21.B	22.D	23.A	24.B	25.A	26.A	27.D	28.C	29.A	30.C
31.A	32.D	33.D	34.B	35.D	36.D				

## Số Phức Cơ Bản

## I. Cộng, Trừ Nhân Chia Số Phức

<b>Khởi động chương trình tính số phức</b> $\boxed{\text{MODE}} \boxed{2}$ Thành phần ảo $\boxed{\text{ENG}}$	
<b>Cộng 2 số phức</b> Ví dụ: $(1+2i)+(-4-5i)$ $\boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{\text{ENG}} \boxed{=}$ Tương tự với phép trừ	
<b>Nhân 2 số phức</b> Ví dụ: $(1+2i)(-4-5i)$ $\boxed{(} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{=}$	
<b>Chia 2 số phức</b> Ví dụ: $\frac{1+2i}{-4-5i}$ $\boxed{\div} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{\downarrow} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{\text{ENG}} \boxed{=}$	

## II. Sử dụng các hàm chức năng trong CMPLX

<b>Tính Module (hàm Abs)</b> Ví dụ: $ 1+2i $ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{=}$	
<b>Tìm số phức liên hợp (Conjg)</b> Ví dụ: $z=1+2i \rightarrow \bar{z}=?$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{=}$	
<b>Đổi dạng đại số sang dạng lượng giác</b> Ví dụ: $z=1+i$ $\boxed{1} \boxed{+} \boxed{\text{ENG}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{=}$	
<b>Đổi dạng lượng giác sang đại số</b> Ví dụ: $z=2\angle\frac{\pi}{3}$ Cách 1: $\boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{(-)} \boxed{\div} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\downarrow} \boxed{3} \boxed{=}$	

**Cách 2:**

**2** **SHIFT** **(←)** **□** **SHIFT** **×10<sup>3</sup>** **▼** **3** **▶** **SHIFT** **2** **4**  
**=**

Tìm Argument (góc)

Ví dụ:  $z = 1 + i$ 

**SHIFT** **2** **1** **1** **+** **ENG** **)** **=**

CMPLX **arg(1+i)**

0.7853981634

**Ví dụ áp dụng:**

**Ví dụ 1:** Tìm  $z$  biết:  $(2+i)z + 1 + 3i = \frac{1+2i}{1+i}$

A.  $\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$

B.  $-\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$

C.  $\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

D.  $-\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

**Bước 1: Vào CMPLX**

**SHIFT** **MODE** **2**

CMPLX **0**

**Bước 2: Nhập biểu thức tính  $z$** 

**□** **□** **1** **+** **2** **ENG** **▼** **1** **+** **ENG** **▶** **-** **1** **-** **3**  
**ENG** **▼** **2** **+** **ENG** **=**

CMPLX **1+i**  
**2+i**  
**-3-11i**

**Bước 3: Chọn đáp án**

(Ngoài cách này các em có thể dùng CACL từng đáp án)

**Ví dụ 2:** Tìm  $|z|$  biết  $z = (2+i)(1-i) + 1 + 3i$

A.  $\sqrt{5}$

B.  $2\sqrt{5}$

C. 3

D.  $\sqrt{10}$

**Hướng dẫn**

Các em nhập cả biểu thức vào máy luôn cho nhanh

**SHIFT** **hyp** **(** **2** **+** **ENG** **)** **(** **1** **-** **ENG** **)** **+** **1** **+** **3** **ENG** **=**

**|(2+i)(1-i)+1+3i|**

**2√5**

Lưu ý: Để nó hiện  $2\sqrt{5}$  như anh các em phải chọn chế độ như sau:

Ví dụ khi bấm  $\sqrt{3}$  (casio 570 vn plus)

MthIO - MathO

**SHIFT** **MODE** **1** **1**  
 CMPLX **Math**

**√3**

MthIO - LineO

**SHIFT** **MODE** **1** **2**  
 CMPLX **Math**

**√3**

**√3**

1.732050808



Học Toán mình cần dạng căn thì để chế độ 1, còn học Hóa mình cần quy nhanh số mol ở dạng thập phân thì để chế độ 2 nhìn cho nhanh.

**Ví dụ 3:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $(1+i)(z-i)+2z=2i$  tính modul số phức

$$w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$$

A.  $\sqrt{13}$

B.  $\sqrt{5}$

C. 5

D.  $\sqrt{10}$

Hướng dẫn

Calculator screen showing the calculation of the modulus of the complex number  $w$ . The screen displays the expression  $\frac{2i+i(1+i)}{1+i+2}$  and its modulus  $\left| \frac{\text{Conjg}(i)-2i+1}{i^2} \right|$ , resulting in  $\text{Ans}^2 = 3.16227766$ .

**Ví dụ 4:** Cho  $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$  tìm phần thực của  $z$

A.  $2^{22}$

B.  $-2^{11}$

C.  $-2^{11} - 2$

D.  $-2^{10}$

Hướng dẫn

Các em lập dòng lệnh để tính tổng như sau:

Calculator screen showing the setup of a loop to calculate the sum of powers of  $(1+i)$ . The screen displays the command  $A+1:B=B+(1+i)^A$ .

Sau đó bấm  $\text{[CALC]}$  máy hỏi A? bấm 1=, máy hỏi B? bấm 0=

Cứ bấm = tới A=A+1 là 22 thì bấm ra B=B+... là dừng, chương trình này thực hiện tính lần lượt từng số hạng rồi cộng với tổng cũ

Calculator screen showing the result of the loop calculation. The screen displays  $A=22$  and  $B=-2050-2048i$ .

Ta có  $-2050 = -2^{11} - 2$  (anh dùng máy 570vn plus được, 570es và vinacal không tính được  $(1+i)^5$ )

### III. Tìm căn của số phức, module

**Ví dụ 1:**  $\sqrt{-33+56i}$

A.  $4+7i$

B.  $-4-7i$

C.  $-4+7i; -4-7i$

D.  $4+7i; -4-7i$

**Cách 1:** Các bạn thử đáp án: Tính mọ

$$(4+7i)^2 = -33+56i$$

$$(-4-7i)^2 = -33+56i$$

**Cách 2:** Tính không dựa vào đáp án

Các bạn về COMP tính toán thông thường:

Chúng ta sẽ chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác để tiến hành khai căn

$$\text{Pol}(-33, 56)$$

$$r=65, \theta=2.103300$$

Khi đó các giá trị góc và bán kính này được lưu ở X, Y

$$X = 65, Y = 2.103300425$$

Sau khi chuyển được sang lượng giác rồi thì các bạn nhớ tới công khai căn dạng lượng giác là

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

Do đó mình lại chuyển từ lượng giác sang đại số bằng cách bấm

$$\text{Rec}(\sqrt[n]{X}, Y \div n)$$

$$X=4, Y=7$$

$\Rightarrow$  Cách này mở rộng ra có thể làm với căn bậc n bằng cách ấn  $\text{Rec}(\sqrt[n]{X}, Y \div n)$

**Cách 3:** Theo SGK :

$$z = 33 - 56i = (a + bi)^2 \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} \rightarrow a^2 - \left( \frac{-28}{a} \right)^2 = 33$$

$$X^2 - \left( \frac{28}{X} \right)^2 - 33 = 0$$

$$\left( X^2 - \left( \frac{28}{X} \right)^2 - 33 \right) \div (X - 7)$$

$$X = 7, L-R = 0$$

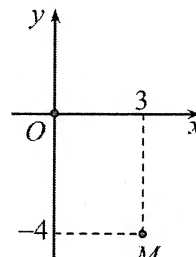
$$X = -7, L-R = 0$$

Vậy đáp án là D.

### Bài tập rèn luyện

**Câu 1.** Điểm  $M$  trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức  $z$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $z$ .

- A. Phần thực là  $-4$  và phần ảo là  $3$ .  
 B. Phần thực là  $3$  và phần ảo là  $-4i$ .  
 C. Phần thực là  $3$  và phần ảo là  $-4$ .  
 D. Phần thực là  $-4$  và phần ảo là  $3i$ .



**Câu 2.** Tìm số phức liên hợp của số phức  $z = i(3i + 1)$ .

- A.  $\bar{z} = 3 - i$ .      B.  $\bar{z} = -3 + i$ .      C.  $\bar{z} = 3 + i$ .      D.  $\bar{z} = -3 - i$ .

**Câu 3.** Tính môđun của số phức  $z$  thỏa mãn  $z(2 - i) + 13i = 1$ .

- A.  $|z| = \sqrt{34}$ .      B.  $|z| = 34$ .      C.  $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$ .      D.  $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$ .

**Câu 4.** Cho số phức  $z = 3 - 2i$ . Tìm phần ảo của số phức liên hợp của  $z$ .

- A.  $2i$ .      B.  $-2i$ .      C.  $2$ .      D.  $-2$ .

**Câu 5.** Cho số phức  $z_1 = 1 + 2i$  và  $z_2 = -2 - 2i$ . Tìm môđun của số phức  $z_1 - z_2$ .

- A.  $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$ .      B.  $|z_1 - z_2| = 1$ .      C.  $|z_1 - z_2| = \sqrt{17}$ .      D.  $|z_1 - z_2| = 5$ .

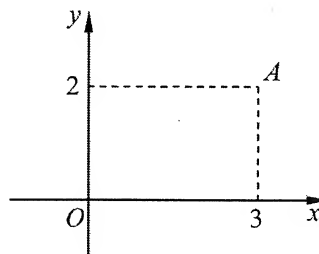
**Câu 6.** Trên mặt phẳng phức, cho điểm  $A$  biểu diễn số phức  $3 - 2i$ , điểm  $B$  biểu diễn số phức  $-1 + 6i$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó điểm  $M$  biểu diễn số phức nào sau đây?

- A.  $1 - 2i$ .      B.  $2 - 4i$ .      C.  $2 + 4i$ .      D.  $1 + 2i$ .

**Câu 7.** Điểm  $A$  trong hình vẽ bên biểu diễn cho số phức  $z$ .

Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $\bar{z}$ .

- A. Phần thực là  $-3$  và phần ảo là  $2$ .  
 B. Phần thực là  $3$  và phần ảo là  $-2$ .  
 C. Phần thực là  $3$  và phần ảo là  $-2i$ .  
 D. Phần thực là  $-3$  và phần ảo là  $2i$ .



**Câu 8.** Cho số phức  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Khi đó

- A.  $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .      B.  $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .      C.  $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ .      D.  $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ .

**Câu 9.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 2 + 3i$  là

- A.  $z = 2 - 3i$ .      B.  $z = -2 - 3i$ .      C.  $z = -2 + 3i$ .      D.  $z = 2 + 3i$ .

**Câu 10.** Phần ảo của số phức  $z = 1 - i$  là

- A. 1.      B. -1.      C.  $2i$ .      D.  $i$ .

**Câu 11.** Môđun của số phức  $z = 2\sqrt{2} - i$  là

- A. 3.      B. 9.      C. 8.      D. 1.

**Câu 12.** Số phức  $z = (1 + 2i)(2 - 3i)$  bằng

- A.  $8 - i$ .      B. 8.      C.  $8 + i$ .      D.  $-4 + i$ .

**Câu 13.** Số phức  $z = \frac{2+i}{4+3i}$  bằng

- A.  $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$ .      B.  $\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$ .      C.  $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$ .      D.  $\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$ .

**Câu 14.** Phần ảo và phần thực của số phức  $z = (1 + i)^{10}$  lần lượt là

- A. 0; 32.      B. 0;  $32i$ .      C. 0; -32.      D.  $32i$ ; 0.

**Câu 15.** Cho hai số phức  $z_1 = 5 - 2i$  và  $z_2 = 3 - 4i$ . Tìm số phức liên hợp của số phức  $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1 \cdot \overline{z_2}$ .

- A.  $\overline{w} = 54 + 26i$ .      B.  $\overline{w} = -54 - 26i$ .      C.  $\overline{w} = 54 - 26i$ .      D.  $\overline{w} = 54 - 30i$ .

**Câu 16.** Tìm số phức liên hợp của số phức  $z = (2 + i)(-3i)$

- A.  $\overline{z} = -3 - 6i$ .      B.  $\overline{z} = -3 + 6i$ .      C.  $\overline{z} = 3 + 6i$ .      D.  $\overline{z} = 3 - 6i$ .

**Câu 17.** Tính môđun của số phức  $z$  thỏa mãn  $5i + (i - 3)z = 4$ .

- A.  $|z| = \frac{410}{10}$ .      B.  $|z| = \sqrt{\frac{410}{10}}$ .      C.  $|z| = \sqrt{\frac{410}{100}}$ .      D.  $|z| = \frac{410}{\sqrt{10}}$ .

**Câu 18.** Nếu số phức  $z \neq 1$  thỏa  $|z| = 1$  thì phần thực của  $\frac{1}{1-z}$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $-\frac{1}{2}$ .      C. 2.      D. một giá trị

**Câu 19.** Cho  $P(z)$  là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức  $z$  thỏa mãn  $P(z) = 0$  thì

- A.  $P(|z|) = 0$ .      B.  $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ .      C.  $P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = 0$ .      D.  $P(\overline{z}) = 0$ .

**Câu 20.** Cho  $z_1, z_2, z_3$  là các số phức thỏa  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.  $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ .  
 B.  $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ .  
 C.  $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ .  
 D.  $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ .

**Câu 21.** Cho  $z_1, z_2, z_3$  là các số phức thỏa mãn  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  và  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A.  $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$ .  
 B.  $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \leq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$ .  
 C.  $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \geq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$ .  
 D.  $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \neq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$ .

**Câu 22.** Tìm môđun của số phức  $z = (2-i)(3+2i) - 2i$ .

- A.  $|z| = \sqrt{65}$ .  
 B.  $|z| = \sqrt{66}$ .  
 C.  $|z| = 8$ .  
 D.  $|z| = \sqrt{67}$ .

**Câu 23.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $(3+2i)z + (2-i)\bar{z} = 2+2i$ . Khi đó  $a+b$  bằng

- A. 2.  
 B. 4.

**Câu 24.** Số phức  $z = a + bi$  thỏa mãn  $2z + \bar{z} - 5 + i = 0$ . Tính  $3a + 2b$ ?

- A. 3.  
 B. -7.  
 C. 6.  
 D. -3.

**Câu 25.** Cho các số phức  $z_1, z_2$  khác nhau thỏa mãn:  $|z_1| = |z_2|$ . Chọn phương án đúng:

- A.  $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$ .  
 B.  $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$  là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0.  
 C.  $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$  là số thực.  
 D.  $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$  là số thuần ảo.

**Câu 26.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$ . Tìm môđun của  $\bar{z} + iz$ .

- A. 8.  
 B.  $8\sqrt{2}$ .  
 C.  $4\sqrt{2}$ .  
 D. 4.

**Câu 27.** Tính  $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$ .

- A.  $S = 2017 - 1009i$ .  
 B.  $1009 + 2017i$ .  
 C.  $2017 + 1009i$ .  
 D.  $1008 + 1009i$ .

**Câu 28.** Cho số phức  $z = (1+i)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  và thỏa mãn  $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3$ . Tìm phần thực của số phức  $z$

- A.  $a = 0$ .  
 B.  $a = 8$ .  
 C.  $a = -8$ .  
 D.  $a = 7$ .

**Câu 29.** Cho số phức  $z = 2 - 3i$ . Tìm môđun của số phức  $w = (1 + i)z - \bar{z}$ .

- A.  $|w| = 3$ .                      B.  $|w| = 5$ .                      C.  $|w| = -4$ .                      D.  $|w| = \sqrt{7}$ .

**Câu 30.** Số phức liên hợp  $\bar{z}$  của số phức  $z = 3(2 + 3i) - 4(2i - 1)$  là

- A.  $\bar{z} = 10 - i$ .                      B.  $\bar{z} = 10 + i$ .                      C.  $\bar{z} = 10 + 3i$ .                      D.  $\bar{z} = 2 - i$ .

**Câu 31.** Cho số phức  $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$ . Tính  $z^5 + z^6 + z^7 + z^8$ .

- A. 4.                      B. 0.                      C.  $4i$ .                      D. 2.

**Câu 32.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$ . Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2.$$

- A.  $P = 1 - i$ .                      B.  $P = -1 - i$ .                      C.  $P = -1$ .                      D.  $P = 1 + i$ .

**Câu 33.** Biểu thức  $P = \frac{1+i^{2017}}{2+i}$  có giá trị là

- A.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ .                      B.  $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ .                      C.  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ .                      D.  $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ .

**Câu 34.** Cho số phức  $z = 1 + i$ . Khi đó  $|z^3|$  bằng

- A.  $\sqrt{2}$ .                      B.  $2\sqrt{2}$ .                      C. 4.                      D. 1.

**Câu 35.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $z(1+i) + \frac{2}{1-i} = \sqrt{14} + 2i$ . Tìm môđun của số phức  $w = z + 1$

- A.  $|w| = 3$ .                      B.  $|w| = \sqrt{8 - \sqrt{14}}$ .                      C.  $|w| = \sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ .                      D.  $|w| = 3\sqrt{2}$ .

**Câu 36.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa  $|z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ . Tính  $|z_1 - z_2|$ .

- A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 37.** Giá trị của biểu thức  $z = \left(1 + i\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{24}$  bằng

- A.  $\frac{2^{24}}{(2 + \sqrt{3})^{12}}$ .                      B.  $\frac{2^{24}}{(2 - \sqrt{3})^{12}}$ .                      C.  $\frac{2^{26}}{(2 - \sqrt{3})^{12}}$ .                      D.  $\frac{2^{26}}{(2 + \sqrt{3})^{12}}$ .

**Câu 38.** Cho số phức  $z = 1 + i$ , môđun số phức  $z_0 = \frac{2z + z^2}{zz + 2z}$  bằng.

A.  $\sqrt{3}$ .

B.  $\sqrt{2}$ .

C.  $1 + \sqrt{2}$ .

D. 1.

**Câu 39.** Với  $z_1, z_2$  là hai số phức bất kỳ, giá trị của biểu thức  $a = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}$  bằng

A.  $a = 2$ .

B.  $a = \frac{1}{2}$ .

C.  $a = 1$ .

D.  $a = \frac{3}{2}$ .

1.C	2.D	3.A	4.C	5.D	6.D	7.B	8.D	9.A	10.B
11.A	12.C	13.A	14.D	15.C	16.C	17.C	18.A	19.D	20.A
21.D	22.A	23.A	24.A	25.D	26.B	27.C	28.B	29.B	30.A
31.B	32.C	33.A	34.B	35.A	36.B	37.A	38.D	39.B	

## Phương Trình Số Phức

**Ví dụ 1:** Tìm số phức  $z$  biết  $z + (2+i)\bar{z} = 3+5i$

A.  $2+3i$ B.  $2-3i$ C.  $-2+3i$ D.  $-2-3i$ 

**Cách 1:** Thử đáp án

<b>Bước 1:</b> Vào CMPLX (Mode 2) rồi Nhập phương trình $\boxed{\text{MODE}} \boxed{2}$ $\boxed{\text{MODE}} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{5} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)}$	
<b>Bước 2:</b> Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ rồi nhập từng đáp án A. $X = 2+3i$ tương tự với B,C,D	
<b>Bước 3:</b> Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ tiếp cho tới khi thấy kết quả bằng 0 $X = 2-3i$	

**Cách 2:** Tìm trực tiếp ra số phức không thông qua đáp án (Pro Skill)

<b>Bước 1:</b> Vào CMPLX (Mode 2) rồi Nhập phương trình $\boxed{\text{MODE}} \boxed{2}$ $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{5} \boxed{\text{ENG}} \boxed{)}$	
<b>Bước 2:</b> Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ rồi nhập $X = 10000 + 100i$ Ở đây chính là $X = a+bi; a=10000, b=100$ từ đó ta tìm ra quy luật chung của biểu thức $30097 + 9895i = (3a+b-3) + (a-b-5)i$ Nó hoàn toàn giống như các em đặt $z = a+bi$ rồi rút gọn giải hệ nhưng ở đây dùng Casio nhanh hơn nhiều bằng việc thể hiện quy luật dưới con số và nhìn ra biểu thức vào giải hệ bậc nhất là xong	
<b>Bước 3:</b> Giải hệ bậc nhất : $\begin{cases} 3a+b=3 \\ a-b=5 \end{cases} \rightarrow a=2, b=-3$ Lưu ý: các em phải lấy số đầu gần nhất tức là: $2198 = 2a + 2b - 2; \quad 2795 = 3a - 2b - 5$	



**Ví dụ 2:** Cho  $2z + 3(1-i)\bar{z} = 1-9i$ . Tìm môđun của  $z$ .

A.  $\sqrt{13}$

B.  $\sqrt{5}$

C. 5

D.  $\sqrt{10}$

Hướng dẫn: Ở ví dụ này các em bắt buộc phải dùng phương án giải trực tiếp

<b>Bước 1: Vào CMPLX (Mode 2) rồi Nhập phương trình</b> $\text{MODE } [2]$ $[2] [\text{ALPHA}] [)] [+ ] [3] [( ] [1] [-] [\text{ENG}] [)] [\text{SHIFT}] [2] [2] [\text{ALPHA}] [)]$ $[)] [-] [( ] [1] [-] [9] [\text{ENG}] [)]$	$\text{Conjg}(X) - (1-9i)$
<b>Bước 2: Bấm [CALC] rồi nhập <math>X = 10000 + 100i</math></b> $49699 - 30091i = (5a - 3a - 1) - (3a + b - 9)i$	$2X + 3(1-i)\text{Conjg}(X)$ $49699 - 30091i$
<b>Bước 3: Giải hệ bậc nhất:</b> $\begin{cases} 5a - 3a = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \rightarrow a = 2, b = 3 \rightarrow  z  = \sqrt{13}$ $\text{MODE } [5] [1]$	$\begin{matrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 9 \end{matrix}$

**Ví dụ 3:** Tính module của  $z^9$  biết:  $\frac{(z-1)(2-i)}{z+2i} = \frac{3+i}{2}$

A.  $\sqrt{2}$

B.  $2\sqrt{2}$

C.  $4\sqrt{2}$

D.  $16\sqrt{2}$

Các bạn quy đồng lên và nhập vào máy tính:  $2(z-1)(2-i) = (3+i)(z+2i)$

CALC  $z = 10000 + 100i$

$(3+i)(\text{Conjg}(X) + 2i)$	$2(X-1)(2-i) - (3+i)X$
$10000 + 100i$	$10098 - 29304i$

Ta suy ra được hệ:  $\begin{cases} a+b-2=0 \\ 3a-7b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \rightarrow z=1+i \rightarrow |z|=\sqrt{2} \rightarrow |z^9|=16\sqrt{2}$

**Ví dụ 3:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $(3z - \bar{z})(1+i) - 5z = 8i - 1$  tìm  $|z|$

A.  $\sqrt{13}$

B.  $\sqrt{5}$

C. 5

D.  $\sqrt{10}$

Hướng dẫn

$(3X - \text{Conjg}(X))(1+i)$	$(3X - \text{Conjg}(X))(1+i) - 5X$
$-30399 + 19892i$	$-1 - 8i$
$X =$	$Y =$
$3$	$-2$

**Ví dụ 5.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1}=2-i$ . Tính modul số phức  $w=1+z+z^2$

A.  $\sqrt{13}$

B.  $\sqrt{5}$

C.5

D.  $\sqrt{10}$ 

## Hướng dẫn

Quy đồng lên rồi mới Calc nhé em

$$5(\text{Conjg}(X)+i)-(2+3i) = 29898+9306i$$

**Ví dụ 6:** Cho số phức  $z=1+\sqrt{3}i$  viết dạng lượng giác của số phức và tìm phần thực và phần ảo của số phức  $w=(1+i)z^5$

**Ví dụ 5[Chuyên KHTN lần 1]:** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Tính giá trị của biểu thức  $P = z_1^{2016} + z_2^{2016}$

A.  $P = 2^{1009}$

### B. $P=0$

$$C, P = 2^{2017}$$
D.  $P = 2^{1008}$ 

## Hướng dẫn

Vào giải phương trình bậc 2 để tìm nghiệm phức

MODE 5 3 1 = 2 = 2 = = Math▼

$X_1 =$   $X_2 =$

$$-1 + i$$

-1-i

Dễ dàng ta thấy máy chẳng thể nào tính được số mũ to như thế  $P = z_1^{2016} + z_2^{2016}$

nên phải dùng mẹo: tức là nó đúng với số to như thế thì sẽ đúng với một số nhỏ hơn ví dụ là 16

Vào lai hê CMPLX:

MODE 2  
 ( (- 1 + ENG ) x^n 1 6 ( + ( (- 1 - ENG ) x^n 1 6 =  
 CMPLX  $\square$  Math  $\blacktriangle$   
 $(-1+i)^6 + (-1-i)^6$   
 512

Ta được:  $P(16) = z_1^{16} + z_7^{16} = 2^9 \rightarrow P(2016) = 2^{1009}$

### Bài Tập Rèn Luyện

**Câu 1.** Tìm số phức  $z$  thỏa mãn  $\bar{z} = \frac{1}{3} \left[ (\overline{1-2i})^2 - z \right]$ .

- A.  $-\frac{3}{4} - 2i$ .      B.  $-\frac{3}{4} + 2i$ .      C.  $2 + \frac{3}{4}i$ .      D.  $2 - \frac{3}{4}i$ .

**Câu 2.** Nghiệm phức của phương trình  $\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}} = \frac{2+3i}{|z|^2}$  là

- A.  $\frac{2}{3} + 3i$ .      B.  $\frac{2}{3} - 3i$ .      C.  $\frac{1}{3} - 2i$ .      D.  $\frac{1}{3} + 2i$ .

**Câu 3.** Kí hiệu  $z_0$  là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình  $4z^2 - 16z + 17 = 0$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $w = iz_0$ ?

- A.  $M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      B.  $M_2\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .      C.  $M_3\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ .      D.  $M_4\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ .

**Câu 4.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$ . Tính  $P = a + b$ .

- A.  $P = \frac{1}{2}$ .      B.  $P = 1$ .      C.  $P = -1$ .      D.  $P = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 5.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\frac{3}{2} < |z| < 2$ .      B.  $|z| > 2$ .      C.  $|z| < \frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ .

**Câu 6.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $2z^2 - 3z + 7 = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $z_1 + z_2 - z_1 z_2$ .

- A.  $-2$ .      B.  $2$ .      C.  $5$ .      D.  $-5$ .

**Câu 7.** Trên tập số phức, tìm nghiệm của phương trình  $iz + 2 - i = 0$ .

- A.  $z = 1 - 2i$ .      B.  $z = 2 + i$ .      C.  $z = 1 + 2i$ .      D.  $z = 4 - 3i$ .

**Câu 8.** Cho số phức  $z = a + bi$  với  $a, b$  là hai số thực khác 0. Một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận  $\bar{z}$  làm nghiệm với mọi  $a, b$  là:

- A.  $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ .      B.  $z^2 = a^2 + b^2$ .      C.  $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$ .      D.  $z^2 + 2az + a^2 - b^2 = 0$ .

**Câu 9.** Cho  $z$  là số phức thỏa mãn  $z + \frac{1}{z} = 1$ . Tính giá trị của  $z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}}$ .

- A.  $-2$ .      B.  $-1$ .      C.  $1$ .      D.  $2$ .

**Câu 10.** Gọi  $z_1, z_2$  là các nghiệm của phương trình  $z^2 + 4z + 5 = 0$ . Đặt  $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$ . Khi đó

- A.  $w = 2^{50}i$ .      B.  $w = -2^{51}$ .      C.  $w = 2^{51}$ .      D.  $w = -2^{50}i$ .

**Câu 11.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $2z = i(\bar{z} + 3)$ . Môđun của  $z$  là

- A.  $|z| = \sqrt{5}$ .      B.  $|z| = 5$ .      C.  $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ .      D.  $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 12.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\sqrt{3}z^2 - z + 6 = 0$ . Tính  $A = z_1^3 + z_2^3$

- A.  $-5,8075$ .      B.  $\frac{-\sqrt{3}+54}{9}$ .      C.  $\frac{\sqrt{3}+54}{-9}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}-54}{9}$ .

**Câu 13.** Cho số phức  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $(1+3i)z + (2+i)\bar{z} = -2+4i$ . Tính  $P = ab$ :

- A.  $P = 8$ .      B.  $P = -4$ .      C.  $P = -8$ .      D.  $P = 4$ .

**Câu 14.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $2z + \bar{z} = 3 + i$ . Tính  $A = |iz + 2i + 1|$

- A.  $\sqrt{5}$ .      B.  $\sqrt{2}$ .      C. 1      D. 3.

**Câu 15.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $(2-i)\bar{z} - 3z = -1 + 3i$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a - b$ .

- A.  $P = 5$ .      B.  $P = -2$ .      C.  $P = 3$ .      D.  $P = 1$ .

**Câu 16.** Cho  $a, b, c$  là các số thực và  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Giá trị của  $(a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz)$  bằng

- A.  $a+b+c$ .      B.  $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ .  
C.  $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ .      D. 0.

**Câu 17.** Tìm số phức  $z$ , biết  $z$  thỏa mãn:  $(z+3-i)^2 - 6(z+3-i) + 13 = 0$

- A.  $z = 2i, z = -2i$ .      B.  $z = i, z = -3i$ .      C.  $z = -i, z = 3i$ .      D.  $z = 3+2i, z = 3-2i$ .

**Câu 18.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$ . Môđun của số phức

$w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$  là

- A.  $\sqrt{10}$ .      B.  $-\sqrt{8}$ .      C.  $\sqrt{8}$ .      D.  $-\sqrt{10}$ .

**Câu 19.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$ .

- A. 3.      B. 2.      C. 1.      D. 4.

**Câu 20.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\frac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$ . Phần thực của số phức  $w = z^2 - z$  là

- A. 3. B. -5. C. 1. D. 2.

**Câu 21.** Kí hiệu  $z_1$  là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình  $6z^2 - 12z + 7 = 0$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức  $w = iz_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$  có tọa độ là.

- A. (0; -1). B. (1; 1). C. (0; 1). D. (1; 0).

**Câu 22.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(1-3i)z + (1+i)^2 \bar{z} = 5-i$ . Tính môđun của  $z$ .

- A.  $|z| = \frac{\sqrt{20}}{3}$ . B.  $|z| = \sqrt{10}$ . C.  $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . D.  $|z| = \frac{\sqrt{29}}{3}$ .

**Câu 23.** Cho số phức  $z$  có phần thực dương và thỏa  $\bar{z} - \frac{(5+\sqrt{3}i)}{z} - 1 = 0$ . Khi đó

- A.  $|z| = 2$ . B.  $|z| = 3$ . C.  $|z| = 4$ . D.  $|z| = \sqrt{7}$ .

**Câu 24.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $z_1, z_2 \neq 0$ ;  $z_1 + z_2 \neq 0$  và  $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ . Tính  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . C.  $2\sqrt{3}$ . D.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 25.** Gọi  $z_1, z_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $z^2 + z + 1 = 0$ . Tính giá trị  $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$ .

- A.  $P = 1$ . B.  $P = -1$ . C.  $P = 0$ . D.  $P = 2$ .

**Câu 26.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm của phương trình  $2z^2 - 3z + 2 = 0$  trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức  $P = \sqrt{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}$ .

- A.  $P = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . B.  $P = \frac{5}{\sqrt{2}}$ . C.  $P = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ . D.  $P = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 27.** Cho số phức  $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^9$ . Khi đó

- A.  $z = i$ . B.  $z = 1 - i$ . C.  $z = 1 + i$ . D.  $z = 1$ .

**Câu 28.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Khi đó  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$  bằng

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

**Câu 29.** Cho hai số phức  $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 1 + 2i$ . Tính môđun của số phức  $z = (z_1 + 2)z_2$ .

- A.  $|z| = 15$ . B.  $|z| = 5\sqrt{5}$ . C.  $|z| = \sqrt{65}$ . D.  $|z| = \sqrt{137}$ .

**Câu 30.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ . Tính  $|z_1 - z_2|$ .

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 31.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(\bar{z})[(3+4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0$ . Giá trị của  $|z|$  là

- A. 2.                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $2\sqrt{2}$ .                      D. 1.

**Câu 32.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z(2i - 3) - 8i\bar{z} = -16 - 15i$ . Tính  $S = a + 3b$

- A.  $S = 4$ .                      B.  $S = 3$ .                      C.  $S = 6$ .                      D.  $S = 5$ .

**Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $a$  sao cho phương trình  $z^2 - az + 2a - a^2 = 0$  có hai nghiệm phức có mô-đun bằng 1.

- A.  $a = 1$ .                      B.  $a = 1; a = -1$ .                      C.  $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $a = -1$ .

**Câu 34.** Cho số phức  $z = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $3z - (4 + 5i)\bar{z} = 17 + 11i$ . Tính  $ab$ .

- A.  $ab = 3$ .                      B.  $ab = -6$ .                      C.  $ab = -3$ .                      D.  $ab = 6$ .

**Câu 35.** Cho số phức  $w$  và hai số thực  $a, b$ . Biết  $z_1 = w + 2i$  và  $z_2 = 2w - 3$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 + az + b = 0$ . Tính  $T = |z_1| + |z_2|$ .

- A.  $T = 2\sqrt{13}$ .                      B.  $T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$ .                      C.  $T = \frac{2\sqrt{85}}{3}$ .                      D.  $T = 4\sqrt{13}$ .

1.A	2.A	3.B	4.C	5.D	6.A	7.C	8.C	9.C	10.B
11.A	12.D	13.A	14.D	15.C	16.B	17.C	18.A	19.A	20.C
21.C	22.D	23.D	24.A	25.B	26.A	27.C	28.B	29.B	30.A
31.D	32.D	33.A	34.D	35.B					

### Hình Học Số Phức

**Ví dụ 1:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2-3i|=1$ . Giá trị lớn nhất của  $|\bar{z}+1+i|$  là:

A.  $\sqrt{13}+2$

B. 4

C. 6

D.  $\sqrt{13}+1$

#### Hướng dẫn

Ở đây các em sử dụng lý thuyết sau:

$|z-z_0|=R$  thì tập hợp các điểm biểu diễn  $z$  là đường tròn có tâm  $z_0=a_0+b_0i \rightarrow I(a_0;b_0)$  và

bán kính là  $R$ , khi đó  $\begin{cases} |z|_{\max} = R + |z_0| \\ |z|_{\min} = |R - |z_0|| \end{cases}$  chúng ta sẽ ứng dụng giải nhanh như sau :

$$|\bar{z}+1+i|^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2 = |z+1-i|^2$$

Đặt :  $w = z+1-i$  bài toán trở thành :  $|w-3-2i|=1$ . Hỏi  $|w|_{\max} = ?$  áp dụng luôn công thức ta

được :  $|w|_{\max} = 1 + \sqrt{3^2+2^2} = 1 + \sqrt{13}$

**Ví dụ 2:** Tìm tập hợp  $z$  thỏa mãn đẳng thức  $|z+2+i| = |\bar{z}-3i|$

A.  $y = x-1$

B.  $y = x+1$

C.  $y = -x+1$

D.  $y = -x-1$

#### Hướng dẫn:

$z = x + yi$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) ta sẽ tìm mối quan hệ  $x, y$ . Xét đáp án A :  $y = x-1 \rightarrow$  chọn  $z = 100 + 99i$

SHIFT hyp ALPHA ) + 2 + ENG ► - SHIFT hyp SHIFT 2 2 ALPHA ) ) - 3 ENG

CMPLX  $\rightarrow$   $|Conj(X)-3i|$

CALC 1 0 0 + 9 9 ENG =

CMPLX  $\rightarrow$   $|X+2+i| - |Conj(X)$

0

**Vậy đáp án A đúng**

**Ví dụ 3.** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện:  $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$  là hình gì ?

- A. Một đường thẳng. B. Một đường Parabol.  
C. Một đường Elip. D. Một đường tròn.

### Hướng dẫn

Các em nhập biểu thức vào máy  $4|z-i|^2 - |z-\bar{z}+2i|^2$  (hiệu bình phương 2 vế) **CALC**  $100+0.01i =$

$$4|X-i|^2 - |X-Complex|^2 = 39999.84$$

Thực chất ở đây giống như tự luận gọi  $z = x + yi$  thì chúng ta dùng casio tính toán nhanh với  $z = 100 + 0.01i$  ta được kết quả là  $39999.84 = (4 \cdot 100^2 - 1) + (1 - 0.16) = 4x^2 + 16y$  vậy phương trình cần tìm là  $4x^2 + 16y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x^2}{4}$  là một parabol

**Ví dụ 4.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\frac{3}{2} < |z| < 2$ . B.  $|z| > 2$ . C.  $|z| < \frac{1}{2}$ . D.  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ .

Hướng dẫn: Ngoài cách ảnh hưởng dẫn ở video ra các em có thể làm như sau :

$$(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (|z|+2) + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$$

$$\text{Lấy Module 2 vế ta được: } (|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2 = \frac{10}{|z|^2}$$

Ra hệ COMP dùng Solve

$$\begin{aligned} & \sqrt{10} - (|z|+2) - (2|z|-1)i = 0 \\ & X = 1 \\ & L-R = 0 \end{aligned}$$

Các em xem thêm cách dùng Newton - Raphson giải mọi loại phương trình số phức 1 ẩn sẽ giải rất nhanh bài này



**Bài Tập Rèn Luyện**

**Câu 1.** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện:  $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$  là hình gì ?

- A. Một đường thẳng. B. Một đường Parabol.  
C. Một đường Elip. D. Một đường tròn.

**Câu 2.** Trong số các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-4+3i|=3$ , gọi  $z_0$  là số phức có mô đun lớn nhất. Khi đó  $|z_0|$  là:

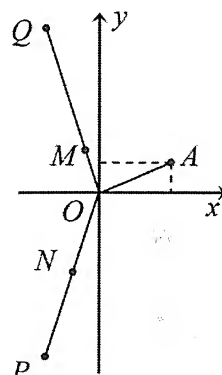
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 8.

**Câu 3.** Gọi  $M$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$  thỏa mãn  $3|z+i|=|2\bar{z}-z+3i|$ . Tập hợp tất cả những điểm  $M$  như vậy là

- A. một parabol. B. một đường thẳng. C. một đường tròn. D. một elip.

**Câu 4.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$  và điểm  $A$  trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của  $z$ . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức  $w=\frac{1}{iz}$  là một trong bốn điểm  $M, N, P, Q$ . Khi đó điểm biểu diễn của số phức  $w$  là

- A. điểm  $Q$ . B. điểm  $M$ .  
C. điểm  $N$ . D. điểm  $P$ .



**Câu 5.** Trong các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2+3i|=\frac{3}{2}$ . Số phức có mô đun nhỏ nhất là

- A.  $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{-78+9\sqrt{13}}{26}i$ . B.  $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} - \frac{-78+9\sqrt{13}}{26}i$ .  
C.  $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{-39+9\sqrt{13}}{13}i$ . D.  $z = \frac{-26+3\sqrt{13}}{13} + \frac{-78+9\sqrt{13}}{26}i$ .

**Câu 6.** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức  $z$  trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn  $|z-i|=1$  là một đường tròn. Gọi  $I$  là tâm của đường tròn này, tọa độ  $I$  là:

- A.  $I(0;-1)$ . B.  $I(0;1)$ .

C.  $I(1;0)$ .

D.  $I(-1;0)$ .

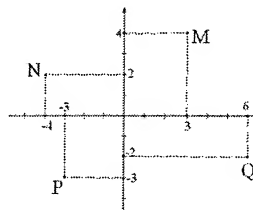
**Câu 7.** Cho  $|z|=2\sqrt{10}$ . Số phức  $z$  được biểu diễn bởi điểm nào trong hình bên:

A.  $P$ .

B.  $M$ .

C.  $N$ .

D.  $Q$ .



**Câu 8.** Trong mặt phẳng phức tập hợp điểm  $M(z)$  thỏa mãn  $z_0z + \overline{z_0}z + 1 = 0$  với  $z_0 = 1 - i$  là đường thẳng có phương trình

A.  $-2x + 2y - 1 = 0$ .

B.  $-2x - 2y - 1 = 0$ .

C.  $2x + 2y - 1 = 0$ .

D.  $2x - 2y - 1 = 0$ .

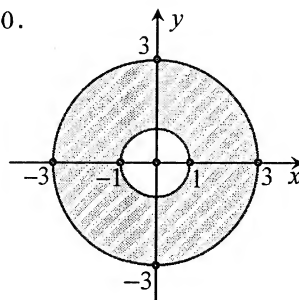
**Câu 9.** Phần gạch chéo trong hình bên là tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện nào?

A.  $1 \leq |z| \leq 3$ .

B.  $|z| \leq 3$ .

C.  $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$ .

D.  $|z| \geq 1$ .



**Câu 10.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-3| + |z+3| = 8$ . Gọi  $M, m$  lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất  $|z|$ . Khi đó  $M+m$  bằng

A.  $4 - \sqrt{7}$ .

B.  $4 + \sqrt{7}$ .

C. 7.

D.  $4 + \sqrt{5}$ .

**Câu 11.** Trong các số phức thỏa mãn điều kiện  $|z+3i| = |z+2-i|$ . Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A.  $z = 1 - 2i$ .

B.  $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ .

C.  $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ .

D.  $z = -1 + 2i$ .

**Câu 12.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-3+4i| \leq 2$ . Trong mặt phẳng  $Oxy$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = 2z + 1 - i$  là hình tròn có diện tích:

A.  $S = 9\pi$ .

B.  $S = 12\pi$ .

C.  $S = 16\pi$ .

D.  $S = 25\pi$ .

**Câu 13.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-i| = 5$ . Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = iz + 1 - i$  là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A.  $r = 22$ .

B.  $r = 4$ .

C.  $r = 20$ .

D.  $r = 5$ .

**Câu 14.** Tìm tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn hình học số phức  $z$  trong mặt phẳng phức, biết số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện:  $|z+4| + |z-4| = 10$ .

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm  $O(0;0)$  và có bán kính  $R = 4$ .

B. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

C. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm  $M(x; y)$  trong mặt phẳng  $Oxy$  thỏa mãn phương trình  $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12$ .

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Câu 15.** Tìm tập hợp những điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  trong mặt phẳng phức, biết số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-2i| = |\bar{z}+1|$ .

A. Tập hợp những điểm  $M$  là đường thẳng có phương trình  $4x+2y+3=0$ .

B. Tập hợp những điểm  $M$  là đường thẳng có phương trình  $4x-2y+3=0$ .

C. Tập hợp những điểm  $M$  là đường thẳng có phương trình  $2x+4y-3=0$ .

D. Tập hợp những điểm  $M$  là đường thẳng có phương trình  $2x+4y+3=0$ .

**Câu 16.** Trong mặt phẳng phức, gọi  $A, B, C$  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức  $z_1 = -1+3i, z_2 = 1+5i, z_3 = 4+i$ . Tứ giác  $ABCD$  là một hình bình hành thì  $D$  là điểm biểu diễn số phức nào?

A.  $2+i$ .

B.  $5+6i$ .

C.  $2-i$ .

D.  $3+4i$ .

**Câu 17.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $|z-2i|=3$  là đường tròn tâm  $I$ . Tất cả giá trị  $m$  thỏa khoảng cách từ  $I$  đến đường thẳng  $d: 3x+4y-m=0$  bằng  $\frac{1}{5}$  là

A.  $m=8; m=-8$ .

B.  $m=8; m=9$ .

C.  $m=-7; m=9$ .

D.  $m=7; m=9$ .

**Câu 18.** Trong các số phức thỏa mãn  $|z| = |\bar{z}-3+4i|$ , số phức nào có mô đun nhỏ nhất

A.  $z = -3-4i$ .

B.  $z = \frac{3}{2}+2i$ .

C.  $z = 3+4i$ .

D.  $z = \frac{3}{2}-2i$ .

**Câu 19.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1|=2$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = (1+i\sqrt{3})z+2$  là một đường tròn. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đó.

A.  $r=16$ .

B.  $r=4$ .

C.  $r=25$ .

D.  $r=9$ .

**Câu 20.** Trong các số phức  $z$  thỏa  $|z+3+4i|=2$ , gọi  $z_0$  là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó:

A. Không tồn tại số phức  $z_0$ .

B.  $|z_0|=2$ .

C.  $|z_0| = 7$ .

D.  $|z_0| = 3$ .

**Câu 21.** Cho thỏa mãn  $z \in \mathbb{C}$  thỏa mãn  $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$ . Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức  $w = (3-4i)z - 1 + 2i$  là đường tròn  $I$ , bán kính  $R$ . Khi đó

A.  $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$ . B.  $I(1; 2), R = \sqrt{5}$ . C.  $I(-1; 2), R = 5$ . D.  $I(1; -2), R = 5$ .

**Câu 22.** Cho các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z+2-2i| = |z-4i|, w = iz+1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|w|$  là

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . B.  $2\sqrt{2}$ . C. 2. D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 23.** Với các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2+i| = 4$ , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  là một đường tròn. Tìm bán kính  $R$  đường tròn đó.

A.  $R = 8$ . B.  $R = 16$ . C.  $R = 2$ . D.  $R = 4$ .

**Câu 24.** Với hai số phức  $z_1$  và  $z_2$  thỏa mãn  $z_1 + z_2 = 8+6i$  và  $|z_1 - z_2| = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $P = |z_1| + |z_2|$

A.  $P = 5+3\sqrt{5}$ . B.  $P = 2\sqrt{26}$ . C.  $P = 4\sqrt{6}$ . D.  $P = 34+3\sqrt{2}$ .

**Câu 25.** Gọi  $A, B$  là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức  $z_1, z_2$  khác 0 thỏa mãn đẳng thức  $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0$ , khi đó tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ)

A. là tam giác đều. B. là tam giác vuông.  
C. là tam giác cân, không đều. D. là tam giác tù.

**Câu 26.** Trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-2+3i| = \frac{3}{2}$ , tìm số phức có môđun nhỏ nhất.

A.  $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}i$ . B.  $z = \frac{25-3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}i$ .  
C.  $z = \frac{26+3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}i$ . D.  $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} - \frac{78-9\sqrt{13}}{26}i$ .

**Câu 27.** Cho số phức  $z$  thỏa:  $2|z-2+3i| = |2i-1-2\bar{z}|$ . Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức  $z$  là

A. Một đường thẳng có phương trình:  $20x-16y-47=0$ .  
B. Một đường thẳng có phương trình:  $20x+16y+47=0$ .  
C. Một đường có phương trình:  $3y^2+20x+2y-20=0$ .  
D. Một đường thẳng có phương trình:  $-20x+32y+47=0$ .

**Câu 28.** Cho  $A, B, C$  lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức  $-4, 4i, m+3i$ . Với giá trị thực nào của  $m$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng?

- A.  $m=1$ . B.  $m=-1$ . C.  $m=2$ . D.  $m=-2$ .

**Câu 29.** Gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức  $1+i, 2+3i$ . Số phức  $z$  biểu diễn bởi điểm  $Q$  sao cho  $\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MQ} = \vec{0}$  là

- A.  $z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ . B.  $z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ . C.  $z = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ . D.  $z = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ .

**Câu 30.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|iz-2|=|1-2i|$ . Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  là một đường tròn. Hãy xác định tọa độ tâm  $I$  của đường tròn đó.

- A.  $I(0; -2)$ . B.  $I(0; -2)$ . C.  $I(-2; 0)$ . D.  $I(2; 0)$ .

**Câu 31.** Cho số phức  $z = m + (m-3)i, m \in \mathbb{R}$ . Tìm  $m$  để điểm biểu diễn của số phức  $z$  nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư.

- A.  $m = \frac{3}{2}$ . B.  $m = \frac{1}{2}$ . C.  $m = \frac{2}{3}$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 32.** Cho số phức  $z$  có số phức liên hợp là  $\bar{z}$ . Gọi  $M$  và  $M'$  tương ứng lần lượt là điểm biểu diễn hình học của  $z$  và  $\bar{z}$ . Hãy chọn mệnh đề đúng.

- A.  $M$  và  $M'$  đối xứng qua trục thực. B.  $M$  và  $M'$  trùng nhau.  
C.  $M$  và  $M'$  đối xứng qua gốc tọa độ. D.  $M$  và  $M'$  đối xứng qua trục ảo.

**Câu 33.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-2-4i|=|z-2i|$ . Tìm số phức  $z$  có môđun nhỏ nhất.

- A.  $z = -1+i$ . B.  $z = -2+2i$ . C.  $z = 2+2i$ . D.  $z = 3+2i$ .

**Câu 34.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-i|=|(1+i)z|$  là đường tròn có phương trình.

- A.  $x^2 + (y+1)^2 = 2$ . B.  $(x-1)^2 + y^2 = 2$ .  
C.  $x^2 + (y-1)^2 = 2$ . D.  $(x+1)^2 + y^2 = 2$ .

**Câu 35.** Gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z = 3-4i$  và điểm  $M'$  là điểm biểu diễn số phức  $z' = \frac{1+i}{2}z$ . Tính diện tích tam giác  $OMM'$  ( $O$  là gốc tọa độ).

- A.  $\frac{15}{2}$ . B.  $\frac{25}{4}$ . C.  $\frac{25}{2}$ . D.  $\frac{31}{4}$ .

**Câu 36.** Cho số phức  $z$  thay đổi thỏa mãn  $|z-3+4i|=4$ . Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P=|z|$ .

- A.  $P_{\max}=9$ .      B.  $P_{\max}=5$ .      C.  $P_{\max}=12$ .      D.  $P_{\max}=3$ .

**Câu 37.** Tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-(1+i)|=|z+2i|$  là đường nào sau đây:

- A. Đường thẳng.      B. Đường tròn.      C. Elip.      D. Parabol.

**Câu 38.** Xét số phức  $z$  và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là  $M, M'$ . Số phức  $z(4+3i)$  và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là  $N, N'$ . Biết rằng  $MM'N'N$  là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|z+4i-5|$ .

- A.  $\frac{5}{\sqrt{34}}$ .      B.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .      C.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .      D.  $\frac{4}{\sqrt{13}}$ .

**Câu 39.** Cho số phức  $z=m-2+(m^2-1)i$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Gọi  $(C)$  là tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(C)$  và  $Ox$ .

- A. 1.      B.  $\frac{4}{3}$ .      C.  $\frac{32}{3}$ .      D.  $\frac{8}{3}$ .

**Câu 40.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $iz+2-i=0$ . Khoảng cách từ điểm biểu diễn của  $z$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  đến điểm  $M(3;-4)$  là

- A.  $2\sqrt{5}$       B.  $\sqrt{13}$       C.  $2\sqrt{10}$       D.  $2\sqrt{2}$

**Câu 41.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1|=|z-i|$ . Tìm mô đun nhỏ nhất của số phức  $w=2z+2-i$ .

- A.  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ .      B.  $3\sqrt{2}$ .      C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 42.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$ .

Tính  $\min |w|$ , với  $w=z-2+2i$ .

- A.  $\min |w|=\frac{3}{2}$ .      B.  $\min |w|=2$ .      C.  $\min |w|=1$ .      D.  $\min |w|=\frac{1}{2}$ .

**Câu 43.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $T=|z+1|+2|z-1|$

- A.  $\max T=2\sqrt{5}$ .      B.  $\max T=2\sqrt{10}$ .      C.  $\max T=3\sqrt{5}$ .      D.  $\max T=3\sqrt{2}$ .

**Câu 44.** Cho số phức  $z=a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn điều kiện  $|z^2+4|=2|z|$ . Đặt  $P=8(b^2-a^2)-12$ .

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A.  $P = (|z| - 2)^2$ .      B.  $P = (|z|^2 - 4)^2$ .      C.  $P = (|z| - 4)^2$ .      D.  $P = (|z|^2 - 2)^2$ .

**Câu 45.** Cho các số phức  $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$ . Tính giá trị của biểu

thức  $P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$ .

A.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .      B.  $\sqrt{2}$ .      C.  $P = 2$ .      D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 46.** Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3 + 5i| = 4$  là một đường tròn. Tính chu vi  $C$  của đường tròn đó.

A.  $C = 4\pi$ .      B.  $C = 2\pi$ .      C.  $C = 8\pi$ .      D.  $C = 16\pi$ .

**Câu 47.** Cho hai số thực  $b$  và  $c (c > 0)$ . Kí hiệu  $A, B$  là hai điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 + 2bz + c = 0$  trong mặt phẳng phức. Tìm điều kiện của  $b$  và  $c$  để tam giác  $OAB$  là tam giác vuông ( $O$  là gốc tọa độ).

A.  $b^2 = 2c$ .      B.  $c = 2b^2$ .      C.  $b = c$ .      D.  $b^2 = c$ .

**Câu 48.** Tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 + 5i| = 4$  là:

A. Đường tròn tâm  $I(2; -5)$  và bán kính bằng 2. B. Đường tròn tâm  $I(-2; 5)$  và bán kính bằng 4.

C. Đường tròn tâm  $I(2; -5)$  và bán kính bằng 4. D. Đường tròn tâm  $O$  và bán kính bằng 2.

**Câu 49.** Cho số phức  $z$  thỏa  $|z - 3 + 4i| = 2$  và  $w = 2z + 1 - i$ . Khi đó  $|w|$  có giá trị lớn nhất là:

A.  $16 + \sqrt{74}$ .      B.  $2 + \sqrt{130}$ .      C.  $4 + \sqrt{74}$ .      D.  $4 + \sqrt{130}$ .

### Bảng Đáp Án

1.B	2.D	3.A	4.D	5.A	6.B	7.D	8.B	9.A	10.B
11.C	12.C	13.D	14.D	15.C	16.C	17.D	18.B	19.B	20.D
21.C	22.A	23.D	24.B	25.A	26.D	27.A	28.B	29.B	30.D
31.A	32.A	33.C	34.A	35.B	36.A	37.A	38.C	39.B	40.C
41.C	42.C	43.A	44.D	45.D	46.C	47.B	48.C	49.D	

## Chuyên đề Oxyz

### I. Kiến thức cần nhớ

#### 1.1. Một số phép toán vector

$$1. \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$2. AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$3. \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$4. k \cdot \vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$5. |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$6. \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$7. \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$8. \vec{a} \text{ cp } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

$$9. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

$$10. [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

11. M là trung điểm AB

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

12. G là trọng tâm tam giác ABC

$$G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

#### 1.2. Phương trình mặt phẳng

\*) Phương trình mp( $\alpha$ ) qua M( $x_0$ ;  $y_0$ ;  $z_0$ ) có vtpt  $\vec{n} = (A; B; C)$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$



$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$  thì ta có vtp  $\vec{n} = (A; B; C)$

\*) Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua  $A(a,0,0)$   $B(0,b,0)$  ;  $C(0,0,c)$  là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

**Chú ý :** Muốn viết phương trình mặt phẳng ta cần xác định tọa độ điểm đi qua và 1 véc tơ pháp tuyến.

\*) Vị trí tương đối của hai mp  $(\alpha_1)$  và  $(\alpha_2)$  :

$$^\circ (\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$$

$$^\circ (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$^\circ (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$^\circ (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

\*) Khoảng cách từ  $M(x_0, y_0, z_0)$  đến  $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$*) \text{ Góc giữa hai mặt phẳng : } \cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

### 1.3. Phương trình đường thẳng

\*) Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  qua  $M(x_0; y_0; z_0)$  có vtcp  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

$$d : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

\*) Phương trình chính tắc của  $d$  :

$$d: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

\*) Vị trí tương đối của 2 đường thẳng  $d, d'$ : Ta thực hiện hai bước

+ Tìm quan hệ giữa 2 vtcp  $\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}$

+ Tìm điểm chung của  $d, d'$  bằng cách xét hệ: 
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases} \quad (I)$$

Hệ (I)	Quan hệ giữa $\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}$	Vị trí giữa $d, d'$
Vô số nghiệm	Cùng phương	$d \equiv d'$
Vô nghiệm		$d // d'$
Có 1 nghiệm	Không cùng phương	$d$ cắt $d'$
Vô nghiệm		$d, d'$ chéo nhau

\*) Góc giữa 2 đường thẳng: Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $d$  và  $d'$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_d \cdot \vec{a}_{d'}|}{|\vec{a}_d| \cdot |\vec{a}_{d'}|} \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

### Phương pháp tọa độ trong không gian

$$\vec{u}(x; y; z) \quad \vec{v}(x'; y'; z')$$

Tích có hướng hai vecto:  $[\vec{u}, \vec{v}] = (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$

Các ứng dụng:

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ cùng phương: } \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ đồng phẳng: } \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0$$

Công thức tính diện tích, thể tích:

Tính diện tích tam giác ABC:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

Tính thể tích tứ diện ABCD:  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \overrightarrow{AD}|$

**Góc giữa hai mặt phẳng (P<sub>1</sub>) và (P<sub>2</sub>):**

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}| |\overline{n_2}|} \quad (\text{Với } \overline{n_1}, \overline{n_2} \text{ là vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng})$$

**Góc giữa hai đường thẳng d<sub>1</sub>; d<sub>2</sub>:**

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{u_1} \cdot \overline{u_2}|}{|\overline{u_1}| |\overline{u_2}|} \quad (\text{Với } \overline{u_1}, \overline{u_2} \text{ là vecto chỉ phương của 2 đường thẳng})$$

**Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

$$\sin \beta = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{u_1}|}{|\overline{n_1}| |\overline{u_1}|} \quad (\text{Với } \overline{n_1} \text{ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P1) và } \overline{u_1} \text{ là vecto chỉ phương của đường thẳng d1.})$$

**Khoảng cách giữa điểm  $M(x_o; y_o; z_o)$  và mặt phẳng  $Ax + By + Cz + D = 0$ :**

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Khoảng cách giữa điểm A đến đường d qua điểm M:**

$$d(A, d) = \frac{|[\overline{u}, \overline{MA}]|}{|\overline{u}|}$$

**Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau**

Đường d1 có vecto chỉ phương  $\overline{u}$  và đi qua M

Đường d2 có vecto chỉ phương  $\overline{v}$  và đi qua N

$$d(d_1, d_2) = \frac{|[\overline{u}, \overline{v}] \overline{MN}|}{|[\overline{u}, \overline{v}]|}$$

## Casio Oxyz Ver 1.0

### I. Kiến thức Casio Oxyz cơ bản

**Bước 1:** Vào hệ Vecto

**MODE** **8**

Máy sẽ hỏi nhập dữ liệu cho vecto nào?

Chọn 1 để nhập dữ liệu cho vecto A và chọn 1 để vào hệ Oxyz

**1** **=** **1** **=** **1** **=**

Để nhập dữ liệu cho vecto B thì bấm:

**SHIFT** **5** **2** **2** **1**

**2** **=** **1** **=** **1** **=**

**\*Tính Độ dài Vecto A**

**AC** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **)** **=**

**Abs(VctA)**

1.732050808

**\*Tính tích có hướng VectA,VectoB**

**AC** **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **4** **=**

**\*Tính tích vô hướng VectA.VectoB**

**AC** **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **=**

**\*Tính tích hỗn tạp của 3 vecto**

(Nhập dữ liệu cho VectoC trước)

**AC** **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **4** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **5** **=**

(Ứng dụng tính thể tích tứ diện khi biết tọa độ 4 đỉnh)

**\*Tính góc giữa 2 vecto**

**AC** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **)** **=** **(**

**SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **)** **X** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **4** **)** **)** **=**

Từ những tính năng cơ bản tính độ dài, tích có hướng, tích vô hướng với việc áp dụng công thức các em có thể tính nhiều thứ khác

Vector?

1:VctA 2:VctB  
3:VctC

VctA(m) m?

1:3 2:2

**A** **[** **-1** **|** **1** **]**

**B** **[** **2** **|** **-1** **]**

**Ans** **[** **1** **|** **-1** **]**

**VctA.VctB**

**VctAVctB.VctC**

**Abs(VctA.VctB)**

0.9428090416

### II. Một số bài tập cơ bản

**Ví dụ 1 [Đề thử nghiệm - Câu 49]:**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và

cách đều hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ ,  $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

A. (P):  $2x-2z+1=0$

B. (P):  $2y-2z+1=0$

C. (P):  $2x-2y+1=0$

D. (P):  $2y-2z-1=0$

Hướng dẫn:  $\begin{cases} \vec{u_1} \perp \vec{n_p} \\ \vec{u_2} \perp \vec{n_p} \end{cases} \Rightarrow \vec{n_p} = [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (0, 1, -1)$  đã tính ở trên loại được A, C còn B, D các em

dùng công thức khoảng cách từ 1 điểm tới một mặt Solve là ra.

**Ví dụ 2:** Trong hệ Oxyz, cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$  và mặt phẳng

(P):  $3x - 3y + 2z + 6 = 0$  Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P) B. d vuông góc với (P)

C. d song song với (P)

D. d nằm trong (P)

Hướng dẫn

AC SHIFT 5 2 1 1 = - 3 = - 1 =  
 SHIFT 5 2 2 3 = - 3 = 2 = 6 =  
 H [ 1 -3 -1 ] E [ 3 -3 F ]  
 - 1 6

Kiểm tra tích vô hướng (kiểm tra tính vuông góc)

VctA · VctB

6

Vậy chúng không song song, kiểm tra tích có hướng (xóa dấu Dot)

(Tính song song nhưng cần nhớ là ta đang xét chỉ phương của đường với pháp tuyến của mặt)

Ans [ -9 6 ]  
 -9 6

-21

Vậy chúng cũng không vuông góc với nhau, do đó loại B, C, D chọn A.

**Ví dụ 3:**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$  và  $d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$  là

A.  $\frac{\sqrt{35}}{17}$

B.  $\frac{\sqrt{35}}{17}$

C.  $\frac{\sqrt{854}}{29}$

D.  $\frac{\sqrt{854}}{29}$

Hướng dẫn: dễ thấy 2 đường song song

Các em nhập dữ liệu cho vecto rồi ộp công thức:  $d(A, d) = \frac{|[\vec{u}, \vec{MA}]|}{|\vec{u}|}$

Tính khoảng cách từ điểm  $M(2, 0, -1)$  tới  $d_2$ ,  $A(7, 2, 0) \in d_2$

$$\text{Abs}(VctA \cdot VctB) \cdot |A| = 5.477225575$$

## II. Một số bài tập nâng cao

**Câu 1. (Chuyên Nguyễn Trãi - HD)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases} \text{ và 2 mặt phẳng } (P) \text{ và } (Q) \text{ lần lượt có phương trình } x+2y+2z+3=0;$$

$x+2y+2z+7=0$ . Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d$ , tiếp xúc với hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

A.  $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$

B.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

C.  $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

D.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

**Hướng dẫn:**

Chúng ta có 2 dữ kiện bài toán:  $\begin{cases} I(t, -1, -t) \\ d_{I \rightarrow (P)} = d_{I \rightarrow (Q)} \end{cases}$  từ dữ kiện 1 loại được C, D

Bây giờ tìm ra được  $t$  nữa là xong thì ta dựa vào điều kiện 2

$$\frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{1}} = -\frac{3}{0}$$

Vậy khoanh B

**Câu 2. (Câu 50 Chuyên Vinh)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm

$M(-2; -2; 1)$ ,  $A(1; 2; -3)$  và đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$ . Tìm vectơ chỉ phương  $\vec{u}$  của

đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$ , vuông góc với đường thẳng  $d$  đồng thời cách điểm  $A$  một khoảng bé nhất.

A.  $\vec{u} = (2; 1; 6)$

B.  $\vec{u} = (1; 0; 2)$

C.  $\vec{u} = (3; 4; -4)$

D.  $\vec{u} = (2; 2; -1)$

**Hướng dẫn**

Chúng ta cũng có 2 dữ kiện cần quan tâm:  $\begin{cases} M \in \Delta \\ d \perp \Delta \\ d_{A \rightarrow (\Delta)} \text{ Min} \end{cases}$

$$2 \alpha (-) + 2 \alpha \text{ } ^{\circ} - \alpha \text{ hyp}$$

**CALC 2 = 1 = 6 =**

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \quad \text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctC})$$

$$6.018264882 \quad 6$$

Vậy chúng ta khoanh B

**Câu 3. (Chuyên Nguyễn Trãi - HD)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $\Delta$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất.

A.  $2x - y + 2z - 1 = 0$

B.  $10x - 7y + 13z + 3 = 0$

C.  $2x + y - z = 0$

D.  $-x + 6y + 4z + 5 = 0$

**Hướng dẫn**

Đầu tiên chúng ta có 2 dữ kiện :  $(Q)$  chứa  $\Delta$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất

Bây giờ ta sẽ xử lý dữ kiện vuông góc:

Đáp án A:  $\text{CALC} \quad 2 \quad = \quad - \quad 1 \quad = \quad 2 \quad =$

$$2A+B-C$$

1

Tương tự B,C,D

$$2A+B-C \quad 2A+B-C \quad 2A+B-C$$

$$0 \quad 6 \quad 0$$

Vậy chỉ B và D có khả năng đúng giờ ta sẽ kiểm tra xem đáp án nào cho góc nhỏ hơn:

$\text{MODE} \quad 8$

Nhập véc tơ pháp tuyến của  $(P)$  vào VectoA

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad = \quad - \quad 1 \quad = \quad 2 \quad =$$

$$\vec{A} \quad [ \quad 2 \quad -1 \quad ]$$

2

Sau đó lưu vecto pháp tuyến của  $(Q)$  ở đáp án B vào VectoB, D vào VectoC

$$\text{AC} \quad \text{SHIFT} \quad 5 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad = \quad - \quad 7 \quad = \quad 1 \quad 3 \quad =$$

$$\text{AC} \quad \text{SHIFT} \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad - \quad 1 \quad = \quad 6 \quad = \quad 4 \quad =$$

$$\vec{B} \quad [ \quad 10 \quad -7 \quad ] \quad \vec{C} \quad [ \quad -1 \quad 6 \quad ]$$

$$13 \quad 4$$



Tính Cos góc giữa 2 mặt bằng biểu thức:  $\cos \alpha = \frac{|\vec{VctA} \cdot \vec{VctB}|}{|\vec{VctA}| |\vec{VctB}|}$

AC SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 ) ) ( SHIFT hyp SHIFT 5 3 ) X SHIFT hyp  
SHIFT 5 4 ) ) =

Abs(VctA·VctB) )

0.9906974722

Sau đó sửa vctB thành VctC

◀◀◀ DEL SHIFT 5 5 ◀◀◀◀◀◀◀◀◀◀◀◀ DEL SHIFT 5 5 =

Abs(VctA·VctC) )

0

Cos càng lớn thì góc càng nhỏ vậy ta thấy góc nhỏ nhất ở đây là đáp án B

**Bài tập rèn luyện**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3;-2;3)$  và  $B(-1;2;5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ .

- A.  $I(-2;2;1)$ .      B.  $I(1;0;4)$ .      C.  $I(2;0;8)$ .      D.  $I(2;-2;-1)$ .

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2+3t \\ z=5-t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$ . Véc-tơ nào

dưới đây là véc-tơ chỉ phương của  $d$ ?

- A.  $\vec{u}_1 = (0;3;-1)$ .      B.  $\vec{u}_2 = (1;3;-1)$ .      C.  $\vec{u}_3 = (1;-3;-1)$ .      D.  $\vec{u}_4 = (1;2;5)$ .

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $A(1;0;0)$ ;  $B(0;-2;0)$ ;  $C(0;0;3)$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng  $(ABC)$ ?

- A.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$ .      B.  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$ .      C.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$ .      D.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$ .

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm  $I(1;2;-1)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(P): x-2y-2z-8=0$ ?

- A.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ .      B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$   
C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ .      D.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ .

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): 3x-3y+2z+6=0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $d$  cắt và không vuông góc với  $(P)$ .      B.  $d$  vuông góc với  $(P)$ .  
C.  $d$  song song với  $(P)$ .      D.  $d$  nằm trong  $(P)$ .

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2;3;1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .

- A.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{AM}{BM} = 2$ .      C.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ .      D.  $\frac{AM}{BM} = 3$ .

**Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  song song và cách đều hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$  và  $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ .

- A.  $(P): 2x-2z+1=0$ .      B.  $(P): 2y-2z+1=0$ .

C.  $(P): 2x - 2y + 1 = 0$ .

D.  $(P): 2y - 2z - 1 = 0$ .

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , xét các điểm  $A(0;0;1)$ ,  $B(m;0;0)$ ,  $C(0;n;0)$ ,  $D(1;1;1)$  với  $m > 0; n > 0$  và  $m+n=1$ . Biết rằng khi  $m, n$  thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đi qua  $d$ . Tính bán kính  $R$  của mặt cầu đó?

A.  $R=1$ .

B.  $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $R=\frac{3}{2}$ .

D.  $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$  và mặt phẳng  $(\alpha): 2x + y - 2z + m = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để  $(\alpha)$  và  $(S)$  không có điểm chung.

A.  $m < -9$  hoặc  $m > 21$ . B.  $-9 < m < 21$ . C.  $-9 \leq m \leq 21$ . D.  $m \leq -9$  hoặc  $m \geq 21$ .

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $\Delta$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất.

A.  $2x - y + 2z - 1 = 0$ . B.  $10x - 7y + 13z + 3 = 0$ . C.  $2x + y - z = 0$ . D.  $-x + 6y + 4z + 5 = 0$ .

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tính khoảng cách từ điểm  $M(1; 2; -3)$  đến mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$ .

A. 1.

B.  $\frac{11}{3}$ .

C.  $\frac{1}{3}$ .

D. 3.

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tính góc giữa hai đường thẳng  $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  và  $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ .

A.  $45^\circ$ .

B.  $30^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(-3; 2; 4)$ , gọi  $A, B, C$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $Ox, Oy, Oz$ . Mặt phẳng nào sau đây song song với  $mp(ABC)$ ?

A.  $4x - 6y - 3z + 12 = 0$ . B.  $3x - 6y - 4z + 12 = 0$ . C.  $4x - 6y - 3z - 12 = 0$ . D.  $6x - 4y - 3z - 12 = 0$ .

**Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q): 2x + y - z = 0$ .

A.  $x + 2y + z = 0$ .

B.  $x - 2y - 1 = 0$ .

C.  $x + 2y - 1 = 0$ .

D.  $x - 2y + z = 0$ .

**Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$  và 2 mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt có phương trình  $x+2y+2z+3=0$ ;  $x+2y+2z+7=0$ . Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d$ , tiếp xúc với hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

- A.  $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{4}{9}$ .      B.  $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$ .  
C.  $(x+3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$ .      D.  $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$ .

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-4}$ . Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng  $d$ ?

- A.  $N(4;0;-1)$ .      B.  $M(1;-2;3)$ .      C.  $P(7;2;1)$ .      D.  $Q(-2;-4;7)$ .

**Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2;3), B(-3;0;1), C(-1;y;z)$ . Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  thuộc trục  $Ox$  khi cặp  $(y;z)$  là:

- A.  $(1;2)$ .      B.  $(-2;-4)$ .      C.  $(-1;-2)$ .      D.  $(2;4)$ .

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a}=(3;0;2)$ ,  $\vec{c}=(1;-1;0)$ . Tìm tọa độ của véc tơ  $\vec{b}$  thỏa mãn biểu thức  $2\vec{b}-\vec{a}+4\vec{c}=\vec{0}$

- A.  $\left(\frac{1}{2};-2;-1\right)$ .      B.  $\left(\frac{-1}{2};2;1\right)$ .      C.  $\left(\frac{-1}{2};-2;1\right)$ .      D.  $\left(\frac{-1}{2};2;-1\right)$ .

**Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a}=(-1;1;0)$ ,  $\vec{b}=(1;1;0)$  và  $\vec{c}=(1;1;1)$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

- A.  $\cos(\vec{b},\vec{c})=\frac{2}{\sqrt{6}}$ .      B.  $\vec{a}\vec{c}=1$ .      C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.      D.  $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ .

**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;1;0)$ ,  $B(2;-1;2)$ . Điểm  $M$  thuộc trục  $Oz$  mà  $MA^2+MB^2$  nhỏ nhất là:

- A.  $M(0;0;-1)$ .      B.  $M(0;0;0)$ .      C.  $M(0;0;2)$ .      D.  $M(0;0;1)$ .

**Câu 21.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;-1;5)$ ,  $B(5;-5;7)$  và  $M(x;y;1)$ . Với giá trị nào của  $x$  và  $y$  thì 3 điểm  $A,B,M$  thẳng hàng?

- A.  $x=4$  và  $y=7$ .      B.  $x=-4$  và  $y=-7$ .      C.  $x=4$  và  $y=-7$ .      D.  $x=-4$  và  $y=7$ .

**Câu 22.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;3;1)$ ,  $B(1;1;0)$  và  $M(a;b;0)$  sao cho  $P = |\overline{MA} - 2\overline{MB}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a+2b$  bằng:

- A. 1.                      B. -2.                      C. 2.                      D. -1.

**Câu 23.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0;0;2)$ ,  $B(3;0;5)$ ,  $C(1;1;0)$ ,  $D(4;1;2)$ . Độ dài đường cao của tứ diện  $ABCD$  hạ từ đỉnh  $D$  xuống mặt phẳng  $(ABC)$  là:

- A.  $\frac{\sqrt{11}}{11}$ .                      B.  $\sqrt{11}$ .                      C. 1.                      D. 11.

**Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;1;-1)$ ,  $B(3;0;1)$ ,  $C(2;-1;3)$ . Điểm  $D$  thuộc  $Oy$  và thể tích khối tứ diện  $ABCD$  bằng 5. Tọa độ điểm  $D$  là:

- A.  $D(0;-7;0)$ .    B.  $D(0;8;0)$ .    C.  $D(0;7;0)$  hoặc  $D(0;-8;0)$ .    D.  $D(0;-7;0)$  hoặc  $D(0;8;0)$ .

**Câu 25.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1} \text{ song song với mặt phẳng } (P): x+y-z+m=0.$$

- A.  $m \neq 0$ .                      B.  $m = 0$ .                      C.  $m \in \mathbb{R}$ .                      D. Không có giá trị nào của  $m$ .

**Câu 26.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \text{ và vuông góc với mặt phẳng } (Q): 2x+y-z=0 \text{ có phương trình là}$$

- A.  $x-2y-1=0$ .                      B.  $x-2y+z=0$ .                      C.  $x+2y-1=0$ .                      D.  $x+2y+z=0$ .

**Câu 27.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(2; 0; -1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (4; -6; 2)$ . Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  là

- A.  $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$                       C.  $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-3t \\ z=2+t \end{cases}$

**Câu 28.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm

$$A(1; 2; 0) \text{ và vuông góc với đường thẳng } d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

- A.  $x+2y-5=0$ .    B.  $2x+y-z+4=0$ .    C.  $-2x-y+z-4=0$ .    D.  $-2x-y+z+4=0$ .

**Câu 29.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A(0; 1; 2)$  trên mặt phẳng  $(P): x+y+z=0$ .

- A.  $(-1; 0; 1)$ .                      B.  $(-2; 0; 2)$ .                      C.  $(-1; 1; 0)$ .                      D.  $(-2; 2; 0)$ .

**Câu 30.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , mặt phẳng chứa 2 điểm  $A(1; 0; 1)$  và  $B(-1; 2; 2)$  và song song với trục  $Ox$  có phương trình là

- A.  $x+y-z=0$ .      B.  $2y-z+1=0$ .      C.  $y-2z+2=0$ .      D.  $x+2z-3=0$ .

**Câu 31.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}$  và mặt phẳng  $(P): x+4y+9z-9=0$ . Giao điểm  $I$  của  $d$  và  $(P)$  là

- A.  $I(2; 4; -1)$ .      B.  $I(1; 2; 0)$ .      C.  $I(1; 0; 0)$ .      D.  $I(0; 0; 1)$ .

**Câu 32.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , mặt phẳng đi qua điểm  $A(1; 3; -2)$  và song song với mặt phẳng  $(P): 2x-y+3z+4=0$  là

- A.  $2x-y+3z+7=0$ .      B.  $2x+y-3z+7=0$ .      C.  $2x+y+3z+7=0$ .      D.  $2x-y+3z-7=0$ .

**Câu 33.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2; 0; 0)$ ;  $B(0; 3; 1)$ ;  $C(-3; 6; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC=2MB$ . Độ dài đoạn  $AM$  là

- A.  $2\sqrt{7}$ .      B.  $\sqrt{29}$ .      C.  $3\sqrt{3}$ .      D.  $\sqrt{30}$ .

**Câu 34.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1; 2; 1)$  và đi qua điểm  $A(0; 4; -1)$  là

- A.  $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ .      B.  $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ .  
C.  $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$ .      D.  $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ .

**Câu 35.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(P): 2x-4y+3=0$  là

- A.  $\vec{n}=(2; -4; 3)$ .      B.  $\vec{n}=(1; -2; 0)$ .      C.  $\vec{n}=(-1; 2; -3)$ .      D.  $\vec{n}=(-2; 1; 0)$ .

**Câu 36.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 1; 0)$  và trọng tâm  $G(2; 1; 3)$ . Tọa độ của đỉnh  $C$  là

- A.  $C(1; 2; 0)$ .      B.  $C(3; 0; 6)$ .      C.  $C(-3; 0; -6)$ .      D.  $C(3; 2; 1)$ .

**Câu 37.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(0; 2; 1)$ ,  $C(1; 0; 2)$ ,  $D(1; 1; 1)$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(0; 2; 1)$ ,  $(\alpha)$  song song với đường thẳng  $CD$ . Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  là

- A.  $x+y+z-3=0$ .      B.  $2x-y+z-2=0$ .      C.  $2x+y+z-3=0$ .      D.  $x+y-2=0$ .

**Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0;2;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(0;0;-3)$ . Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là

A.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-3} = 1$ .    B.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 0$ .    C.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$ .    D.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 0$ .

**Câu 39.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$  cắt mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(1;-3;2)$  theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng  $4\pi$ . Bán kính của mặt cầu  $(S)$  là

A. 2.    B.  $2\sqrt{2}$ .    C. 3.    D.  $\sqrt{20}$ .

**Câu 40.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M(2;1;2)$  đồng thời cắt các tia  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt tại  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sao cho tứ diện  $OABC$  có thể tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  là

A.  $2x + y + z - 7 = 0$ .    B.  $x + 2y + z - 6 = 0$ .    C.  $x + 2y + z - 1 = 0$ .    D.  $2x + y - 2z - 1 = 0$ .

**Câu 41.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tính khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $2x + 2y + z - 3 = 0$ .

A. 1.    B.  $\frac{1}{3}$ .    C. 2.    D. 3.

**Câu 42.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(-1;2;1)$ ,  $B(0;0;-2)$ ,  $C(1;0;1)$ ,  $D(2;1;-1)$ . Tính thể tích tứ diện  $ABCD$ .

A.  $\frac{1}{3}$ .    B.  $\frac{2}{3}$ .    C.  $\frac{4}{3}$ .    D.  $\frac{8}{3}$ .

**Câu 43.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  song song và cách đều hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$  và  $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ .

A.  $(P): 2x - 2z + 1 = 0$ .    B.  $(P): 2y - 2z + 1 = 0$ .    C.  $(P): 2x - 2y + 1 = 0$ .    D.  $(P): 2y - 2z - 1 = 0$ .

**Câu 44.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-1;1)$ ,  $B(2;1;-2)$ ,  $C(0;0;1)$ . Gọi  $H(x;y;z)$  là trực tâm tam giác  $ABC$  thì giá trị  $x+y+z$  là kết quả nào dưới đây?

A. 1.    B. -1.    C. 0.    D. -2.

**Câu 45.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1;2;-1)$ ,  $C(3;-4;1)$ ,  $B'(2;-1;3)$  và  $D'(0;3;5)$ . Giả sử tọa độ  $D(x;y;z)$  thì giá trị của  $x+2y-3z$  là kết quả nào dưới đây?

A. 1.    B. 0.    C. 2.    D. 3.

**Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - z + 3 = 0$  và đường thẳng  $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{2}$ . Gọi  $A$  là giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ ; gọi  $M$  là điểm thuộc  $(d)$  thỏa mãn điều kiện  $MA = 2$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$ .

A.  $\frac{4}{9}$ .

B.  $\frac{8}{3}$ .

C.  $\frac{8}{9}$ .

D.  $\frac{2}{9}$ .

**Câu 47.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , xét mặt cầu  $(S)$  đi qua hai điểm  $A(1;2;1), B(3;2;3)$ , có tâm thuộc mặt phẳng  $(P): x - y - 3 = 0$ , đồng thời có bán kính nhỏ nhất, hãy tính bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$ .

A. 1.

B.  $\sqrt{2}$ .

C. 2.

D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$  và  $D(1;1;1)$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $D$  và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm  $A, B, C$  đến  $\Delta$  là lớn nhất, hỏi  $\Delta$  đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A.  $M(-1;-2;1)$ .

B.  $M(5;7;3)$ .

C.  $M(3;4;3)$ .

D.  $M(7;13;5)$ .

**Câu 49.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $M(3;0;0), N(0;0;4)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

A.  $MN = 10$ .

B.  $MN = 5$ .

C.  $MN = 1$ .

D.  $MN = 7$ .

**Câu 50.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho mặt phẳng  $(P): -3x + 2z - 1 = 0$ . Véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của mặt phẳng  $(P)$  là

A.  $\vec{n} = (-3; 2; -1)$ .

B.  $\vec{n} = (3; 2; -1)$ .

C.  $\vec{n} = (-3; 0; 2)$ .

D.  $\vec{n} = (3; 0; 2)$ .

### Bảng Đáp Án

1.A	2.A	3.C	4.C	5.A	6.A	7.B	8.A	9.A	10.B
11.D	12.D	13.C	14.B	15.B	16.C	17.B	18.B	19.A	20.D
21.D	22.B	23.A	24.D	25.A	26.A	27.A	28.D	29.A	30.C
31.D	32.A	33.B	34.A	35.B	36.B	37.C	38.C	39.B	40.B
41.A	42.D	43.B	44.A	45.B	46.C	47.D	48.B	49.B	50.C



## Thể Tích Khối Đa Diện

### I. Kiến Thức Cần Nhớ

#### 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông :

Cho  $\triangle ABC$  vuông ở A ta có :

- Định lý Pitago :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

- $BA^2 = BH.BC$ ;  $CA^2 = CH.CB$

- $AB.AC = BC.AH$

- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

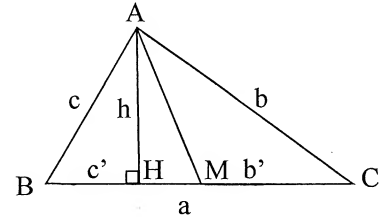
- $AH^2 = BH.CH$

- $BC = 2AM$

- $\sin B = \frac{b}{a}$ ,  $\cos B = \frac{c}{a}$ ,  $\tan B = \frac{b}{c}$ ,  $\cot B = \frac{c}{b}$

- $b = a.\sin B = a.\cos C$ ,  $c = a.\sin C = a.\cos B$ ,  $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$ ,

- $b = c.\tan B = c.\cot C$



#### 2. Hệ thức lượng trong tam giác thường:

- \* Định lý hàm số Côsin:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

- \* Định lý hàm số Sin:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

#### 3. Các công thức tính diện tích.

a. Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a.h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

**Đặc biệt :**

- \*  $\triangle ABC$  vuông ở A :  $S = \frac{1}{2} AB.AC$

- \*  $\triangle ABC$  đều cạnh a:  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

b. Diện tích hình vuông :  $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$

c. Diện tích hình chữ nhật :  $S = \text{dài} \times \text{rộng}$

d. Diện tích hình thoi :  $S = \frac{1}{2} (\text{chéo dài} \times \text{chéo ngắn})$

e. Diện tích hình thang :  $S = \frac{1}{2} (\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao}$

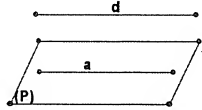
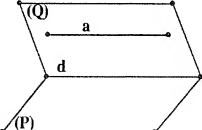
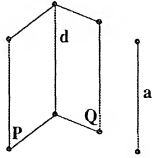
f. Diện tích hình bình hành :  $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

g. Diện tích hình tròn :  $S = \pi.R^2$

### Quan hệ song song – vuông góc

#### A. Quan hệ song song

##### 1. Đường thẳng và mặt phẳng song song

<b>ĐL1:</b> Nếu đường thẳng $d$ không nằm trên mp(P) và song song với đường thẳng $a$ nằm trên mp(P) thì đường thẳng $d$ song song với mp(P)	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d // a \Rightarrow d // (P) \\ a \subset (P) \end{cases}$	
<b>ĐL2:</b> Nếu đường thẳng $a$ song song với mp(P) thì mọi mp(Q) chứa $a$ mà cắt mp(P) thì cắt theo giao tuyến song song với $a$ .	$\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d // a$	
<b>ĐL3:</b> Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) // a \\ (Q) // a \end{cases} \Rightarrow d // a$	

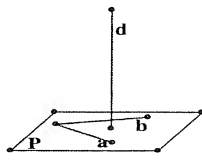
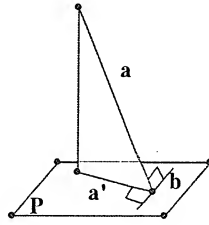
đó.		
-----	--	--

## 2. Hai mặt phẳng song song

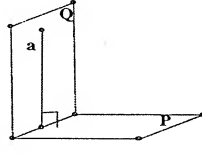
<b>ĐL1:</b> Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a // (Q), b // (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$	
<b>ĐL2:</b> Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P) // (Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a // (Q)$	
<b>ĐL3:</b> Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P) // (Q) \\ (R) \cap (P) = a \Rightarrow a // b \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases}$	

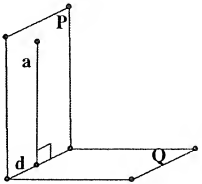
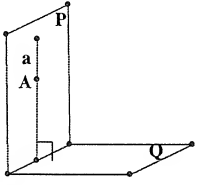
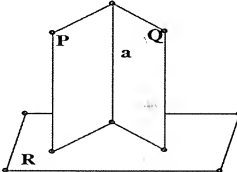
## B. Quan hệ vuông góc

### 1. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng

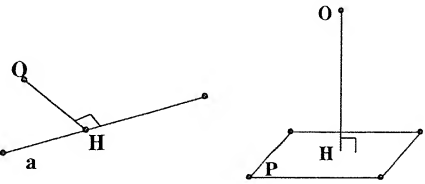
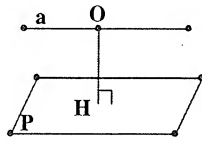
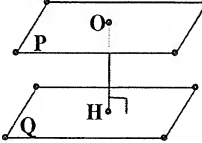
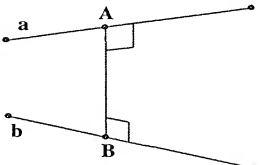
<p><b>ĐL1:</b> Nếu đường thẳng <math>d</math> vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau <math>a</math> và <math>b</math> cùng nằm trong <math>mp(P)</math> thì đường thẳng <math>d</math> vuông góc với <math>mp(P)</math>.</p>	$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset mp(P) \Rightarrow d \perp mp(P) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases}$	
<p><b>ĐL2:</b> (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng <math>a</math> không vuông góc với <math>mp(P)</math> và đường thẳng <math>b</math> nằm trong <math>(P)</math>. Khi đó, điều kiện cần và đủ để <math>b</math> vuông góc với <math>a</math> là <math>b</math> vuông góc với hình chiếu <math>a'</math> của <math>a</math> trên <math>(P)</math>.</p>	$\begin{aligned} &a \not\perp mp(P), b \subset mp(P) \\ &b \perp a \Leftrightarrow b \perp a' \end{aligned}$	

## 2. Hai mặt phẳng vuông góc

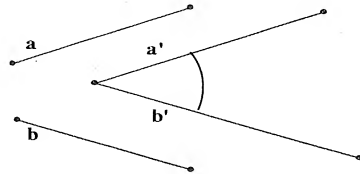
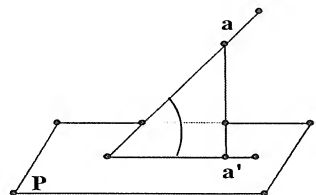
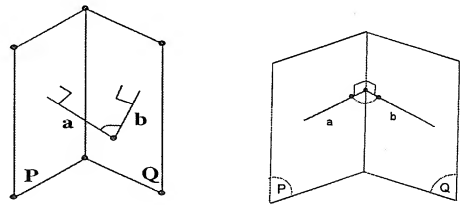
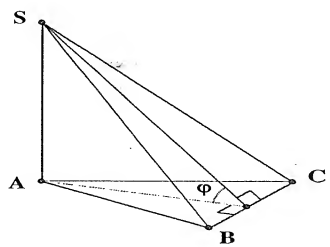
<p><b>ĐL1:</b> Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.</p>	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
---	--	--

<p><b>DL2:</b> Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).</p>	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (Q) \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases}$	
<p><b>DL3:</b> Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P)</p>	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	
<p><b>DL4:</b> Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.</p>	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$	

### 3. Khoảng Cách

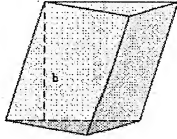
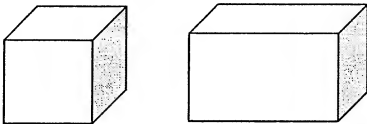
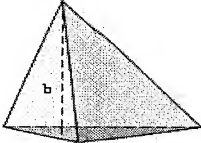
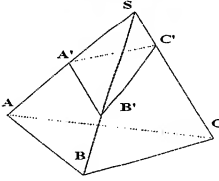
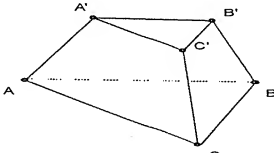
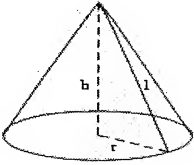
<p><b>1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng:</b></p> <p>Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a ( hoặc trên mp(P))</p> $d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH$	
<p><b>2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:</b></p> <p>Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P).</p> $d(a; (P)) = OH$	
<p><b>3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:</b></p> <p>là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.</p> $d((P); (Q)) = OH$	
<p><b>4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:</b></p> <p>là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.</p> $d(a; b) = AB$	

#### 4. GÓC

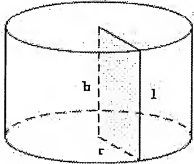
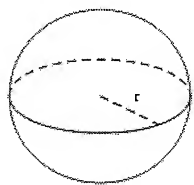
<p><b>1. Góc giữa hai đường thẳng <math>a</math> và <math>b</math></b> là góc giữa hai đường thẳng <math>a'</math> và <math>b'</math> cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với <math>a</math> và <math>b</math>.</p>	
<p><b>2. Góc giữa đường thẳng <math>a</math> không vuông góc với mặt phẳng <math>(P)</math></b> là góc giữa <math>a</math> và hình chiếu <math>a'</math> của nó trên <math>mp(P)</math>. <b>Đặc biệt:</b> Nếu <math>a</math> vuông góc với mặt phẳng <math>(P)</math> thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng <math>a</math> và <math>mp(P)</math> là <math>90^\circ</math>.</p>	
<p><b>3. Góc giữa hai mặt phẳng</b> là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm</p>	
<p><b>4. Diện tích hình chiếu:</b> Gọi <math>S</math> là diện tích của đa giác <math>(H)</math> trong <math>mp(P)</math> và <math>S'</math> là diện tích hình chiếu <math>(H')</math> của <math>(H)</math> trên <math>mp(P')</math> thì <math display="block">S' = S \cos \varphi</math>trong đó <math>\varphi</math> là góc giữa hai mặt phẳng <math>(P), (P')</math>.</p>	

## THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN – MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

### I. Các công thức

<b>1. Lăng Trụ</b>	$V = B.h$ <p>(B: S<sub>đáy</sub>; h: chiều cao)</p>	
<b>Khối Hộp Chữ Nhật</b>  <b>Thể tích khối lập phương:</b> với a là độ dài cạnh	$V = a.b.c$ <p>(a,b,c là ba kích thước)</p> $V = a^3$ <p>(a là độ dài cạnh)</p>	
<b>2. Khối Chóp</b>	$V = \frac{1}{3} Bh$ <p>(B: S<sub>đáy</sub>; h: chiều cao)</p>	
<b>3. Tỷ số tứ diện</b>	$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \frac{SB}{SB'} \frac{SC}{SC'}$	
<b>4. Chóp Cụt</b>	$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{B.B'})$	
<b>5. Khối nón</b>	$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $S_{xq} = \pi r l$	



6. Khối Trụ	$V = \pi r^2 h$ $S_{xq} = 2\pi r l$	
7. KHỐI CẦU	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $S = 4\pi r^2$	

**Chú ý:**

1. Đường chéo của hình vuông cạnh  $a$  là  $d = a\sqrt{2}$ ,

Đường chéo của hình lập phương cạnh  $a$  là  $d = a\sqrt{3}$ ,

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước  $a, b, c$  là  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ,

2. Đường cao của tam giác đều cạnh  $a$  là  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4. Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

**Bài tập rèn luyện**

**Câu 1.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$  và  $BAD = 60^\circ$ ,  $AB'$  hợp với đáy ( $ABCD$ ) một góc  $30^\circ$ . Thể tích của khối hộp là

- A.  $\frac{a^3}{2}$ .      B.  $\frac{3a^3}{2}$ .      C.  $\frac{a^3}{6}$ .      D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .

**Câu 2.** Cắt hình nón đỉnh  $S$  bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $a\sqrt{2}$ . Gọi  $BC$  là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng ( $SBC$ ) tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $SBC$ .

- A.  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $S = \frac{a^2}{3}$ .      C.  $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 3.** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đáy là hình tròn tâm  $O$ , thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh  $a$ , thể tích của khối nón là

- A.  $\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{3}$ .      B.  $\frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{3}$ .      C.  $\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$ .      D.  $\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ĐÚNG?

- A. Hai khối chóp có hai đáy là hai tam giác đều bằng nhau thì thể tích bằng nhau.  
 B. Hai khối lăng trụ có chiều cao bằng nhau thì thể tích bằng nhau.  
 C. Hai khối đa diện có thể tích bằng nhau thì bằng nhau.  
 D. Hai khối đa diện bằng nhau có thể tích bằng nhau.

**Câu 5.** Cho khối nón đỉnh  $O$ , chiều cao là  $h$ . Một khối nón khác có đỉnh là tâm  $I$  của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh  $I$  lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{h}{2}$ .      B.  $\frac{h}{3}$ .      C.  $\frac{2h}{3}$ .      D.  $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a$ , tam giác  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

- A.  $V = \frac{a^3}{2}$ .      B.  $V = a^3$ .      C.  $V = \frac{3a^3}{2}$ .      D.  $V = 3a^3$ .

**Câu 7.** Một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao và nội tiếp trong mặt cầu bán kính  $R$ . Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

- A.  $4\pi R^2$ .      B.  $2\pi R^2$ .      C.  $2\sqrt{2}\pi R^2$ .      D.  $\sqrt{2}\pi R^2$ .

**Câu 8.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có cạnh bên  $AA' = 2a$ . Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = 2a\sqrt{3}$ . Thể tích của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ này là

- A.  $2\pi a^3$       B.  $4\pi a^3$       C.  $8\pi a^3$       D.  $6\pi a^3$

**Câu 9.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$ . Kẻ  $EK \perp SD$  tại  $K$ . Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm  $S, A, B, C, E, K$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}a$ .      B.  $a$ .      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}a$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

**Câu 10.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biết thể tích của khối lăng trụ là  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$ .

- A.  $\frac{2a}{3}$ .      B.  $\frac{4a}{3}$ .      C.  $\frac{3a}{4}$ .      D.  $\frac{3a}{2}$ .

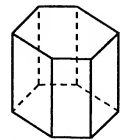
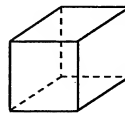
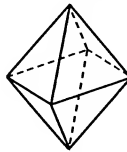
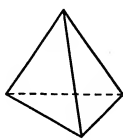
**Câu 11.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$  với  $BC = 2a$ ,  $BAC = 120^\circ$ , biết  $SA \perp (ABC)$  và mặt  $(SBC)$  hợp với đáy một góc  $45^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

- A.  $\frac{a^3}{3}$ .      B.  $a^3\sqrt{2}$ .      C.  $\frac{a^3}{2}$ .      D.  $\frac{a^3}{9}$ .

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$  và thể tích bằng  $a^3$ . Tính chiều cao  $h$  của hình chóp đã cho.

- A.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$ .      B.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ .      C.  $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ .      D.  $h = \sqrt{3}a$ .

**Câu 13.** Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



- A. Tứ diện đều.      B. Bát diện đều.      C. Hình lập phương.      D. Lăng trụ lục giác đều.

**Câu 14.** Cho tứ diện  $ABCD$  có thể tích bằng 12 và  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $AGBC$ .

- A.  $V = 3$ .      B.  $V = 4$ .      C.  $V = 6$ .      D.  $V = 5$ .

**Câu 15.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ , cạnh

$AC = 2\sqrt{2}$ . Biết  $AC'$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$  và  $AC' = 4$ . Tính thể tích  $V$  của khối đa diện  $ABCB'C'$ .

- A.  $V = \frac{8}{3}$ .      B.  $V = \frac{16}{3}$ .      C.  $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 16.** Cho khối  $(N)$  có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng  $15\pi$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón  $(N)$ .

- A.  $V = 12\pi$ .      B.  $V = 20\pi$ .      C.  $V = 36\pi$ .      D.  $V = 60\pi$ .

**Câu 17.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh đáy bằng  $a$  và chiều cao bằng  $h$ . Tính thể tích  $V$  của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

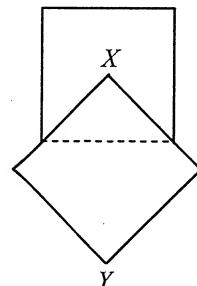
- A.  $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$ .      B.  $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$ .      C.  $V = 3\pi a^2 h$ .      D.  $V = \pi a^2 h$ .

**Câu 18.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $AD = 2a$  và  $AA' = 2a$ . Tính bán kính  $R$  của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABB'C'$ .

- A.  $R = 3a$ .      B.  $R = \frac{3a}{4}$ .      C.  $R = \frac{3a}{2}$ .      D.  $R = 2a$ .

**Câu 19.** Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh  $X$  của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục  $XY$ .

- A.  $V = \frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}$ .      B.  $V = \frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}$ .  
C.  $V = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$ .      D.  $V = \frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}$ .



**Câu 20.** Cắt hình tròn đỉnh  $S$  bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $a\sqrt{2}$ . Gọi  $BC$  là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng  $(SBC)$  tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ . Diện tích của tam giác  $SBC$  bằng

- A.  $\frac{a^2}{3}$ .      B.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ .      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 21.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = a$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Đường chéo  $BC'$  của mặt bên  $(BB'C'C)$  tạo với mặt phẳng  $mp (AA'C'C)$  một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích của mỗi khối lăng trụ theo  $a$  là:

- A.  $V = a^3\sqrt{6}$ .      B.  $V = a^3\frac{4\sqrt{6}}{3}$ .      C.  $V = a^3\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .      D.  $V = a^3\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 22.** Hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AB = 4a, AD = 3a$ ; các cạnh bên đều có độ dài bằng  $5a$ . Thể tích hình chóp  $S.ABCD$  bằng:

- A.  $9a^3\sqrt{3}$ .      B.  $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $10a^3\sqrt{3}$ .      D.  $\frac{10a^3}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ; hình chiếu của  $S$  trên  $(ABCD)$  trùng với trung điểm của cạnh  $AB$ ; cạnh bên  $SD = \frac{3a}{2}$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  tính theo  $a$  bằng

- A.  $\frac{a^3\sqrt{7}}{3}$ .      B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .      C.  $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ .      D.  $\frac{a^3}{3}$ .

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ;  $AB = a, SA \perp (ABC)$ . Cạnh bên  $SB$  hợp với đáy một góc  $45^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  tính theo  $a$  bằng:

- A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $\frac{a^3}{3}$ .      C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .      D.  $\frac{a^3}{6}$ .

**Câu 25.** Thiết diện qua trung của một hình trụ là một hình vuông cạnh  $a$ , diện tích toàn phần của hình trụ là

- A.  $\frac{3\pi a^2}{2}$ .      B. Kết quả khác.      C.  $\frac{3\pi a^2}{5}$ .      D.  $3\pi a^2$ .

**Câu 26.** Cho hình tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\angle ABC = 30^\circ$  và cạnh góc vuông  $AC = 2a$  quay quanh cạnh  $AC$  tạo thành hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

- A.  $16\pi a^2\sqrt{3}$ .      B.  $8\pi a^2\sqrt{3}$ .      C.  $2\pi a^2$ .      D.  $\frac{4}{3}\pi a^2\sqrt{3}$ .

**Câu 27.** Người ta gọt một khối lập phương gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết các cạnh của khối lập phương bằng  $a$ . Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

- A.  $\frac{a^3}{4}$ .      B.  $\frac{a^3}{6}$ .      C.  $\frac{a^3}{12}$ .      D.  $\frac{a^3}{8}$ .

**Câu 28.** Hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$ , góc giữa  $SC$  và đáy bằng  $60^\circ$ . Thể tích hình chóp  $S.ABCD$  bằng:

- A.  $3\sqrt{2}a$ .      B.  $\sqrt{6}a^3$ .      C.  $3a^3$ .      D.  $\sqrt{2}a^3$ .

**Câu 29.** Thể tích ( $cm^3$ ) khối tứ diện đều cạnh bằng  $\frac{2}{3} cm$  là:

A.  $\frac{2\sqrt{2}}{81}$ .      B.  $\frac{2\sqrt{3}}{81}$ .      C.  $\frac{\sqrt{3}}{18}$ .      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 30.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Biết thể tích của khối lăng trụ là  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'$  và  $BC$  là:

A.  $\frac{3a}{2}$ .      B.  $\frac{4a}{3}$ .      C.  $\frac{3a}{4}$ .      D.  $\frac{2a}{3}$ .

**Câu 31.** Một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao và nội tiếp trong mặt cầu bán kính  $R$ . Diện tích xung quanh của hình trụ bằng:

A.  $2\pi R^2$ .      B.  $4\pi R^2$ .      C.  $2\sqrt{2}\pi R^2$ .      D.  $\sqrt{2}\pi R^2$ .

**Câu 32.** Cho tứ diện  $MNPQ$ . Gọi  $I$ ;  $J$ ;  $K$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $MN$ ;  $MP$ ;  $MQ$ . Tỷ số thể tích  $\frac{V_{MUK}}{V_{MNPQ}}$  là:

A.  $\frac{1}{3}$ .      B.  $\frac{1}{4}$ .      C.  $\frac{1}{6}$ .      D.  $\frac{1}{8}$ .

**Câu 33.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  bằng:

A.  $\frac{5\pi\sqrt{15}}{24}$ .      B.  $\frac{5\pi\sqrt{15}}{72}$ .      C.  $\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$ .      D.  $\frac{5\pi\sqrt{15}}{54}$ .

**Câu 34.** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đáy là hình tròn tâm  $O$ , thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh  $a$ , thể tích của khối nón là:

A.  $\frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{3}$ .      B.  $\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$ .      C.  $\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{3}$ .      D.  $\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 35.** Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = x$  xoay quanh trục  $Ox$  bằng:

A.  $\pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx$ .      B.  $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_0^1 x^4 dx$ .  
C.  $\pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx$ .      D.  $\pi \int_0^1 (x^2 + x) dx$ .

**Câu 36.** Kí hiệu  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2x - x^2$  và trục  $Ox$ . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng  $(H)$  khi nó quay quanh trục  $Ox$ .

- A.  $\frac{17\pi}{15}$ .      B.  $\frac{18\pi}{15}$ .      C.  $\frac{19\pi}{15}$ .      D.  $\frac{16\pi}{15}$ .

**Câu 37.** Hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ;  $SA \perp (ABCD)$ , góc giữa  $SC$  và đáy bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

- A.  $3\sqrt{2}a^3$ .      B.  $3a^3$ .      C.  $\sqrt{6}a^3$ .      D.  $\sqrt{2}a^3$ .

**Câu 38.** Biết rằng khi quay một đường tròn có bán kính bằng 1 quay quanh một đường kính của nó ta được một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

- A.  $4\pi$ .      B.  $V = \frac{4}{3}\pi$ .      C.  $2\pi$ .      D.  $\pi$ .

**Câu 39.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = a$ ,  $ACB = 60^\circ$ . Đường chéo  $BC'$  của mặt bên  $(BCC'B')$  tạo với mặt phẳng  $(AA'C'C)$  một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích của khối lăng trụ theo  $a$ .

- A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ .      B.  $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$ .      C.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .      D.  $a^3\sqrt{6}$ .

**Câu 40.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  với  $AB = BC = a\sqrt{3}$ , góc  $SAB = SCB = 90^\circ$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

- A.  $16\pi a^2$ .      B.  $8\pi a^2$ .      C.  $12\pi a^2$ .      D.  $2\pi a^2$ .

**Câu 41.** Trong không gian, cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AD = a$ ,  $AC = 2a$ . Tính theo  $a$  độ dài đường sinh  $l$  của hình trụ, nhận được khi quay hình chữ nhật  $ABCD$  xung quanh trục  $AB$ .

- A.  $l = a\sqrt{3}$ .      B.  $l = a\sqrt{5}$ .      C.  $l = a\sqrt{2}$ .      D.  $l = a$ .

**Câu 42.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $S$  là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ . Tính  $S$ .

- A.  $\pi a^2\sqrt{3}$ .      B.  $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\pi a^2$ .      D.  $\pi a^2\sqrt{2}$ .

**Câu 43.** Cho tứ diện  $MNPQ$ . Gọi  $I$ ;  $J$ ;  $K$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $MN$ ;  $MP$ ;  $MQ$ .

Tính tỉ số thể tích  $\frac{V_{MLJK}}{V_{MNPQ}}$ .

- A.  $\frac{1}{6}$ .      B.  $\frac{1}{8}$ .      C.  $\frac{1}{4}$ .      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 44.** Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay có đường sinh  $l = 10\text{cm}$ , bán kính đáy  $r = 5\text{cm}$  là

- A.  $50cm^2$ .      B.  $50\pi cm^2$ .      C.  $25\pi cm^2$ .      D.  $100\pi cm^2$ .

**Câu 45.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi với  $AC=2a, BD=3a, SA \perp (ABCD)$ ,  $SA=6a$ . Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  là

- A.  $V=2a^3$ .      B.  $V=6a^3$ .      C.  $V=18a^3$ .      D.  $V=12a^3$ .

**Câu 46.** Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 47.** Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $2\sqrt{3}$ . Thể tích của khối nón này là:

- A.  $3\pi$ .      B.  $3\pi\sqrt{3}$ .      C.  $\pi\sqrt{3}$ .      D.  $3\pi\sqrt{2}$ .

**Câu 48.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $SA \perp (ABC)$ , gọi  $D, E$  lần lượt là trung điểm của  $SB$  và  $SC$ . Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  là

- A. điểm  $S$ .      B. điểm  $B$ .      C. điểm  $D$ .      D. điểm  $E$ .

**Câu 49.** Thể tích của khối đa diện có các đỉnh là tâm của các mặt hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$  là

- A.  $V=\frac{a^3}{4}$ .      B.  $V=\frac{a^3}{6}$ .      C.  $V=\frac{a^3}{3}$ .      D.  $V=\frac{a^3}{8}$ .

**Câu 50.** Cho tứ diện  $ABCD$  đều có cạnh  $a$ , tỉ số thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  và thể tích khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện là.

- A.  $3\sqrt{3}$ .      B.  $\sqrt{3}$ .      C.  $\frac{3}{2}$ .      D. 3.

**Câu 51.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB=a, AD=2a, AA'=3a$ . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  là

- A.  $V=\sqrt{6}\pi a^3$ .      B.  $V=\frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$ .      C.  $V=\frac{28\sqrt{14}\pi a^3}{3}$ .      D.  $V=4\sqrt{6}\pi a^3$ .

**Câu 52.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có tất cả các cạnh đều bằng 4. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  là

- A.  $\frac{4}{3}\pi r^2$ .      B.  $4\pi r^2$ .      C.  $24\pi$ .      D.  $12\pi$ .

**Câu 53.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác  $ABC.A'B'C'$ , tam giác  $ABC$  có  $AB=a, AC=2a$ , góc  $BAC=60^\circ, BB'=a$ . Thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là

- A.  $V=a^3$ .      B.  $V=\frac{a^3}{2}$ .      C.  $V=a^3\sqrt{3}$ .      D.  $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .



**Câu 54.** Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a$ , gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ , góc giữa  $A'I$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là

- A.  $a^3\sqrt{6}$ .      B.  $a^3\sqrt{3}$ .      C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ .

**Câu 55.** Thể tích của khối trụ có bán kính đáy  $r=2cm$  và chiều cao  $h=9cm$  là

- A.  $18\pi cm^3$ .      B.  $18cm^3$ .      C.  $162\pi cm^3$ .      D.  $36\pi cm^3$ .

**Câu 56.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ , một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  lần lượt tại  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . Biết  $AM=\frac{1}{3}a$ ,  $CP=\frac{2}{5}a$ . Thể tích khối đa diện  $ABCD.MNPQ$  là:

- A.  $\frac{11}{30}a^3$ .      B.  $\frac{a^3}{3}$ .      C.  $\frac{2a^3}{3}$ .      D.  $\frac{11}{15}a^3$ .

**Câu 57.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ ,  $BAD=BAA'=DAA'=60^\circ$ . Thể tích của khối hộp là:

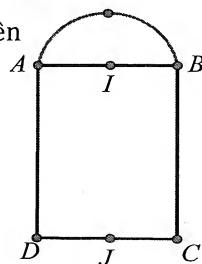
- A.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ .      B.  $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ .      C.  $\frac{3a^3}{4}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ .

**Câu 58.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$  và mặt bên tạo với đáy một góc  $45^\circ$ . Thể tích  $V$  khối chóp  $S.ABCD$  là:

- A.  $V=\frac{a^3}{2}$ .      B.  $V=\frac{a^3}{9}$ .      C.  $V=\frac{a^3}{6}$ .      D.  $V=\frac{1}{24}a^3$ .

**Câu 59.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  và nửa đường tròn đường kính  $AB$  như hình vẽ. Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Biết  $AB=4$ ;  $AD=6$ . Thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục  $IJ$  là:

- A.  $V=\frac{56}{3}\pi$ .      B.  $V=\frac{104}{3}\pi$ .  
C.  $V=\frac{40}{3}\pi$ .      D.  $V=\frac{88}{3}\pi$ .



**Câu 60.** Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh  $a$  là:

- A.  $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{3}$ .      B.  $S_{xq}=\frac{2\pi a^2}{3}$ .      C.  $S_{xq}=\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{3}$ .      D.  $S_{xq}=\frac{2\pi\sqrt{3}a^2}{3}$ .

**Câu 61.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ . Biết góc giữa  $SB$  và  $mp(ABC)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABC$  là:

A.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$ .      B.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$ .      C.  $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ .      D.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 62.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $ASB = CSB = 60^\circ$ ,  $ASC = 90^\circ$ ,  $SA = SB = a$ ,  $SC = 3a$ . Thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABC$  là:

A.  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ .      B.  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ .      C.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .      D.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$ .

**Câu 63.** Khi cắt mặt cầu  $S(O, R)$  bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu  $S(O, R)$  nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết  $R = 1$ , tính bán kính đáy  $r$  và chiều cao  $h$  của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu  $S(O, R)$  để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A.  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .      B.  $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 64.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với  $mp(ABC)$  và  $SC$  hợp với đáy một góc bằng  $60^\circ$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ . Thể tích của khối cầu  $(S)$  bằng:

A.  $\frac{5\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ .      B.  $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ .      C.  $\frac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ .      D.  $\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ .

**Câu 65.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Biết  $BAD = 120^\circ$ ,  $SMA = 45^\circ$ . Khoảng cách từ  $D$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng:

A.  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{6}}{5}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

**Câu 66.** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính thể tích của khối lăng trụ.

A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ .      B.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .      C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .      D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ .

**Câu 67.** Diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy  $R$ , chiều cao  $h$  và độ dài đường sinh  $l$  là?

A.  $S_p = 2\pi R^2 + 2\pi Rl$ .      B.  $S_p = \pi R^2 + 2\pi Rl$ .

C.  $S_p = \pi R^2 + \pi Rl$ .

D.  $S_p = 2\pi R^2 + \pi Rl$ .

**Câu 68.** Khối tứ diện đều có bao nhiêu mặt ?

A. 5 B. 7 C. 4 D. 6

**Câu 69.** Diện tích của hình cầu đường kính bằng  $4a$  là

A.  $S = \frac{64}{3}\pi a^2$ .

B.  $S = \frac{16}{3}\pi a^2$ .

C.  $S = 64\pi a^2$ .

D.  $S = 16\pi a^2$ .

**Câu 70.** Cho hình chóp  $S.ABC$  đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  có hai mặt phẳng  $(SAB); (SAC)$  cùng vuông góc với mặt đáy. Góc giữa  $SC$  và mặt phẳng đáy bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ .

A.  $\frac{a\sqrt{15}}{8}$ .

B.  $\frac{a\sqrt{15}}{4}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{15}}{12}$ .

D.  $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ .

### Bảng Đáp Án

1.A	2.D	3.C	4.D	5.B	6.B	7.B	8.D	9.B	10.C
11.D	12.D	13.A	14.B	15.D	16.A	17.B	18.C	19.C	20.B
21.A	22.C	23.D	24.D	25.A	26.B	27.B	28.D	29.A	30.C
31.B	32.D	33.D	34.B	35.A	36.D	37.D	38.A	39.D	40.C
41.A	42.D	43.B	44.B	45.B	46.D	47.C	48.D	49.B	50.A
51.B	52.C	53.D	54.B	55.D	56.A	57.B	58.C	59.D	60.C
61.B	62.A	63.C	64.B	65.D	66.A	67.A	68.C	69.C	70.B

## Tổng Quát các dạng Toán ứng dụng

Với mỗi chương thì đều có ứng dụng riêng trong đời sống:

Hàm số sử dụng nhiều nhất là max-min để tìm giá trị tạo ra hiệu quả cao nhất trong công việc, trong tiết kiệm nguyên vật liệu để sản xuất những vật có cùng thể tích nhưng diện tích xung quanh nhỏ và còn nhiều ứng dụng khác dạng toán khó là khi hàm số kết hợp với hình học không gian cổ điển để giải bài toán liên quan tới thể tích hay diện tích xung quanh, diện tích toàn phần ngoài ra cũng không thể bỏ qua phần đạo hàm liên quan tới quãng đường và vận tốc, gia tốc có mối quan hệ chặt chẽ với phần tích phân

Mũ-Log chủ yếu phản ánh quy luật gia tăng trong cuộc sống như gửi tiền ngân hàng, gia tăng dân số, vi khuẩn, phóng xạ, lan truyền âm thanh, động đất, độ PH trong hóa học.

Tích Phân có tác dụng mạnh mẽ trong việc tính diện tích, thể tích không chỉ có vậy còn ứng dụng rất nhiều trong vật lý để tính quãng đường, công, điện tích, lực đàn hồi....

Sau đây là một số ví dụ mẫu

### I. Ứng dụng Hàm Số

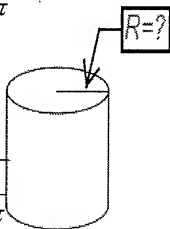
**Ví dụ :** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng  $V$  và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy  $R$  bằng:

A.  $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

B.  $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

C.  $R = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$

D.  $R = \sqrt{\frac{V}{\pi}}$



**Hướng dẫn:** Chọn  $V = 1$  để đơn giản hóa bài toán

Ta có:  $V = S.h = \pi R^2.h \rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$

Thiết lập biểu thức:

$$S_{tp} = S_{xp} + S_{2day} = 2\pi R.h + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$$

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\pi x^2; f'(x) = \frac{-2}{x} + 4\pi x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \rightarrow A$$

## II. Ứng dụng Mũ Logarit

### Ứng dụng 1: Lãi kép

Gửi vào ngân hàng số tiền là  $a$  đồng, với lãi suất hàng tháng là  $r\%$  trong  $n$  tháng. Tính cả vốn lẫn lãi  $T$  sau  $n$  tháng?

$$T = a(1 + r)^n$$

### Ứng dụng 2: Gửi đều đặn định kì

Anh Lực Hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là  $a$  (đồng). Biết lãi suất hàng tháng là  $m\%$ . Hỏi sau  $n$  tháng, anh ấy có bao nhiêu tiền?

$$T_n = \frac{a}{m} [(1+m)^n - 1](1+m)$$

### Ứng dụng 3: Vay vốn trả góp

Số tiền còn nợ sau  $n$  tháng là:  $A(1+r)^n - a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

**Ví dụ [Đề mẫu 2017]:** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau 1 tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền  $m$  mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu. Biết lãi suất ngân hàng không đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

A.  $\frac{100.1,01^3}{3}$     B.  $\frac{100.1,01^3}{1,01^3 - 1}$     C.  $\frac{100.1,03}{3}$     D.  $\frac{120.1,12^3}{1,12^3 - 1}$

Các em áp dụng đúng công thức Solve ta được trùng với đáp án B

$$\begin{array}{l} 100(1+0.01)^3 - X \times 3 \\ X = 34.00221115 \\ L-R = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{100(1.01^3)}{(1.01^2 + 1.01 + 1)} \\ 34.00221115 \end{array}$$

**Ứng dụng 4: Lương**

Tăng lương  $A = a(1+r)^n$       Giảm lương:  $A = A_0(1-r)^n$

**Ví dụ:** Sinh viên Ngoại thương đi làm mức lương khởi điểm 15 triệu/tháng nhưng vì công ty khó khăn nên bị giảm 2% một tháng. Sinh viên đại học Y đi làm mức lương 3 triệu/tháng nhưng tăng trưởng đều đặn 2% một tháng. Sau bao lâu thì mức lương sinh viên Y vượt mức lương của sinh viên Ngoại thương?

A. 40 tháng      B. 50 tháng      C. 60 tháng      D. 70 tháng

Hướng dẫn:

$$15(1-0.02)^x = 3(1+0.02)^x$$

$$\log_{1.02} \left( \frac{15}{3} \right) \quad \text{Math} \quad \blacktriangle$$

$$\frac{0.98}{0.98} \quad 40.23058245$$

Sau hơn 40 tháng sinh viên Y sẽ vượt thu nhập sinh viên Ngoại thương

**Ứng Dụng 5: Toán tăng dân số**

**Ví dụ:** Dân số Việt Nam năm 2017 là 90 triệu. Tăng trưởng dân số hàng năm là 1,32%. Dự đoán dân số 10 năm sau?

A. 102,7      B. 102,6      C. 109,55      D. 107,85

Đáp án A. Áp dụng công thức :  $S = A.e^{Nr}$

Tóm tắt đề bài A: 90 triệu ; N: 10 năm ; r: 1,32%. Tính S??

$$90 \times e^{10 \times 0.0132} \quad \text{Math} \quad \blacktriangle$$

$$102.6997487$$

Các em nên dùng công thức này vì dân số tăng trưởng sinh theo giây nên phải dùng công thức trên.

Nếu các em dùng công thức kia dưới đây sẽ bị sai số:

$$90 \times \left(1 + \frac{1.32}{100}\right)^{10} = 102.6110946$$

Bởi vậy nếu bài toán đáp án không lệch nhiều thì không sao. Còn không bị dẫn đến đáp án sai.

### Ứng Dụng 5: Ứng dụng trong Vật lý, Hóa học, Sinh Học, Địa Lý

**Ví dụ 1:** Số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ thành 300 con.

Hỏi sau 10 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn? Biết sự tăng trưởng của vi khuẩn theo công thức  $S = A \cdot e^{rt}$  (A: số lượng vi khuẩn ban đầu; r: tỷ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng)

- A. 800      B. 900      C. 1000      D. 1100

Hướng dẫn

$$100e^{5x} = 300 \quad \text{Math} \quad 100e^{10x} = 900$$

$$x = 0.2197224577 \quad \text{Math} \quad x = 0.4394449154$$

$$L-R = 0 \quad \text{Math} \quad L-R = 0$$

**Ví dụ 2:** Chu kỳ bán hủy của chất phóng xạ  $\text{Pu}^{239}$  là 24360 năm. (Tức là sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy tính theo công thức  $S = A \cdot e^{rt}$ . Trong đó A: lượng phóng xạ ban đầu, S: lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. t: thời gian phân hủy. Hỏi 10 g  $\text{Pu}^{239}$  sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 g?

- A. 80922,17      B. 80933,17      C. 80233,17      D. 81933,17

Hướng dẫn

Từ dữ kiện sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa

$$0.5 = e^{x \times 24360} \quad \text{Math} \quad \text{Ans} \rightarrow A \quad 1 = 10e^{Ax} \quad \text{Math} \quad 1 = 10e^{Ax}$$

$$x = -2.845431 \times 10^{-5} \quad \text{Math} \quad x = 80922.16839$$

$$L-R = 0 \quad \text{Math} \quad L-R = 0$$

### Độ pH trong hóa học

pH: là viết tắt của Potential of hydrogen còn gọi là tiềm lực Hidro.

pH<7: dung dịch có tính axit

pH=7: dung dịch trung tính

pH>7: dung dịch có tính bazơ

Công thức :  $\text{pH} = -\log(\text{H}^+)$

Cần chú ý:  $[\text{H}^+].[\text{OH}^-] = 10^{-14}$  để tính toán  $[\text{H}^+]$  nếu cho nồng độ  $[\text{OH}^-]$  và ngược lại.

**Ví dụ 1:** Bia có  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 0,00008$ . Tính độ pH của bia?

A. 4,09      B. 5,09      C. 6,09      D. 7,09

Đáp án A

$-\log(0.00008)$

4.096910013

### Độ chấn động trong địa lý

Độ chấn động M ( đơn vị Richtre):  $M = \ln \frac{I}{I_0}$

$I_0$  là biên độ của dao động bé hơn  $1 \mu\text{m}$  trên máy đo địa chấn, đặt cách tâm địa chấn 100km.  $I_0$  được lấy làm chuẩn.

Năng lượng giải tỏa E tại tâm chấn ở M (richte) được xác định xấp xỉ bằng công thức:  $\log E \approx 11,4 + 1,5M$

### Độ Richter

1-2 trên thang Richter : Không nhận biết được

2-4 trên thang Richter: Có thể nhận biết nhưng không gây thiệt hại

4-5 trên thang Richter: Mặt đất rung chuyển, nghe tiếng nổ, thiệt hại không đáng kể



5–6 trên thang Richter: Nhà cửa rung chuyển, một số công trình có hiện tượng bị nứt

6–7 trên thang Richter: 7–8 trên thang Richter

Mạnh, phá hủy hầu hết các công trình xây dựng thông thường, có vết nứt lớn hoặc hiện tượng sụt lún trên mặt đất.

8–9 trên thang Richter: Rất mạnh, phá hủy gần hết cả thành phố hay đô thị, có vết nứt lớn, vài tòa nhà bị lún

>9 trên thang Richter: Rất hiếm khi xảy ra

>10 trên thang Richter: Cực hiếm khi xảy ra

**Câu 2:** Động đất Việt Nam, với cường độ 6,75 độ Richter. Tính cường độ động đất ở Mỹ biết năng lượng tỏa ra ở trận động đất ở Mỹ gấp 3000 lần ở Việt Nam.

A. 7,56      B. 7.06      C. 7.66      D. 8.16

Hướng dẫn

$$10^{11.4 + 1.5 \times 6.75} \quad (\log(3\text{Ans}) - 11.4)$$

$$3.349654392 \times 10^{21} \quad 7.068080836$$

### Độ to nhỏ của âm

Mức cường độ của âm đặc trưng cho độ to nhỏ của âm là một phần trong vật lý. Đơn vị dB (dexiben) :  $L(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$

I: cường độ âm (đơn vị  $\text{W}/\text{m}^2$ ) ;  $I_0$ : cường độ âm ở ngưỡng nghe.  $I_0 = 10^{-12}$

VD1: Hai âm có mức độ cường độ âm chênh lệch nhau 40dB. Tỷ số cường độ âm của chúng là:

A.  $10^2$       B.  $10^4$       C.  $4 \cdot 10^3$       D.  $4 \cdot 10^2$

Hướng dẫn

$$L_1 - L_2 = 40 \Leftrightarrow 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 40 \Leftrightarrow \log \frac{I_1}{I_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^4$$

### III. Ứng Dụng của Tích Phân trong đời sống

Ngoài những ứng dụng để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong hay thể tích khối tròn xoay thì tích phân còn có những ứng dụng to lớn trong các lĩnh vực khác ở cuộc sống.

#### 1. Ứng dụng tính quãng đường:

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow v = \int a dt = at + C \quad v = \frac{ds}{dt} \rightarrow s = \int v dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C$$

Với  $a, v, s$  lần lượt là gia tốc, vận tốc và quãng đường của vật, dựa vào thời điểm ban đầu của vật để tìm C

**Ví dụ 1:** Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc ( $cm/s^2$ ) là:  $a = -20(1+2t)^{-2}$  với  $t$  tính bằng giây. Biết rằng khi  $t = 0 \rightarrow v = 30cm/s^2$

Vận tốc của hạt tại thời điểm  $t = 2s$  là?

- A.10                      B.12                      C.20                      D.22

**Hướng dẫn:**

$$v = \int a dt = \int \frac{-20}{(1+2t)^2} dt \quad \text{Đặt } u = 1+2t \rightarrow du = 2dt \rightarrow v = \int \frac{-10}{u^2} du = \frac{10}{u} + C = \frac{10}{1+2t} + C$$

$$\text{khi } t = 0 \rightarrow v = 30cm/s^2 \Rightarrow C = 20$$

$$\text{Vậy } v = \frac{10}{1+2t} + 20 \text{ tại } t = 2 \rightarrow v = 22cm/s^2$$

Ngoài ra để giải nhanh thì các bạn có thể tính độ giảm của vận tốc

$$t = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow \Delta v = \int_0^2 \frac{-20}{(1+2t)^2} dt = -8 \rightarrow v_{t=2} = v_{t=0} + \Delta v = 22$$

**Ví dụ 2:** Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc  $15m/s$ . Hỏi sau 2.5 s tia lửa ấy có chiều cao bao nhiêu?

A. 6,875

B. 6

C. 8,65

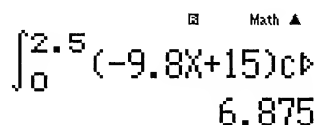
D. 5,25

Ở đây tia lửa chịu tác dụng của gia tốc trọng trường  $g = -9,8m/s^2$  do ngược hướng với chiều chuyển động. Các em làm tương tự như trên thì được:

$$v = \int a dt = \int -9,8 dt = -9,8t + C$$

Ban đầu  $t=0, v=15 \rightarrow C=15$  nên  $v = -9,8t + 15$

Vậy quãng đường nó đi được là :  $s = \int_0^{2.5} (-9,8t + 15) dt = 6,875$  nên chọn A



$$\int_0^{2.5} (-9.8x + 15) dx = 6.875$$

**Ví dụ 3: (Đề mẫu 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10m/s$  thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v = -5t + 10(m/s)$  trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m

B. 2m

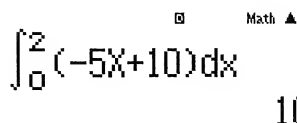
C. 10m

D. 20m

Hướng dẫn

Các em dùng tích phân:  $v=0 \rightarrow t=2$

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \rightarrow s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$



$$\int_0^2 (-5x + 10) dx = 10$$

**2. Tính hiệu điện thế qua tụ điện**

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i dt \quad V_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

Với  $i$  là cường độ dòng điện,  $q$  là điện tích trên 2 bản tụ và  $C$  là điện dung của tụ là nơi tích và phóng các điện tích.

**Ví dụ 1.** Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (mA) là một hàm số theo thời gian  $t$ :  $i = 0,3 - 0,2t$ . Tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch 0,05 s là bao nhiêu? (mC)

- A. 0,01      B. 0,015      C. 0,02      D. 0,025

Hướng dẫn

$$p = \int i dt = 0,3t - 0,1t^2 + K \quad (\text{để là } K \text{ để tránh bị trùng với điện dung } C)$$

$$\text{Khi } t = 0, q = 0 \rightarrow K = 0 \rightarrow q_{t=0,05} = 3,0,05 - 0,1(0,05)^2 = 0,015(\text{mC})$$

**Ví dụ 2:** Hiệu điện thế đi qua tụ điện có điện dung 8.5 nF đặt trong mạch thu sóng FM gần bằng 0. Nếu có cường độ dòng điện  $i = 0,042t$  (mA) nạp vào tụ, tìm hiệu điện thế sau  $2\mu\text{s}$

- A. 9.56 nV      B. 9,88 nV      C. 15.25 nV      D. 15,66 nV

Hướng dẫn

$$\text{Các bạn dùng công thức: } V_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\frac{1}{8.5 \times 10^{-9}} \int_0^{2 \times 10^{-6}} 0.42x dx = \frac{1}{8.5 \times 10^{-9}} \left[ 0.21x^2 \right]_0^{2 \times 10^{-6}} = \frac{1}{8.5 \times 10^{-9}} \times 0.84 \times 10^{-12} = 98.82352941 \times 10^{-6}$$

### 3. Tính công sinh ra bởi lực biến thiên

Nếu lực xác định bởi hàm  $F(x)$  thì công sinh ra theo trục  $x$  từ  $a$  tới  $b$  là:

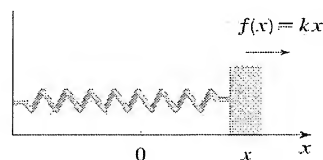
$$W = \int_a^b F(x) dx$$

**Ví dụ 1:** Tìm công sinh ra của lò xo khi anh Lực nén lò xo đang ở trạng thái tự nhiên dài 1 m xuống còn 0,75 m nếu biết độ cứng của lò xo là  $k = 16 \text{ N/m}$  và biểu thức tính lực  $F(x) = kx$  với  $x$  là độ nén hoặc dãn của lò xo có đơn vị tính bằng mét.

- A. 0      B. 0,5      C. 1      D. 1,5

Hướng dẫn

$$W = \int_0^{0,25} 16x dx = 8x^2 \Big|_0^{0,25} = 0,5(\text{Nm}) \text{ vậy chọn B}$$



**Ví dụ 2:** Một lực 40N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm đến 15 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 15 cm đến 18 cm.

- A. 1,25      B. 1,56      C. 2,56      D. 3,12

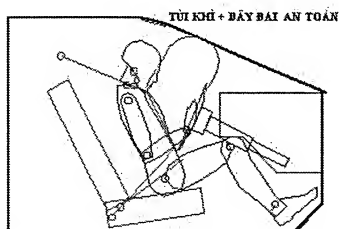
Hướng dẫn

Khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 15 cm thì nó bị kéo căng thêm  $5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$ . Khi đó:  $0,05k = 40 \rightarrow k = 800 \rightarrow F(x) = 800x$  công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 18 cm là :

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x dx = 800 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,56(\text{J})$$

**Một số ứng dụng trong cuộc sống :**

### 1. Kiểm tra va chạm:

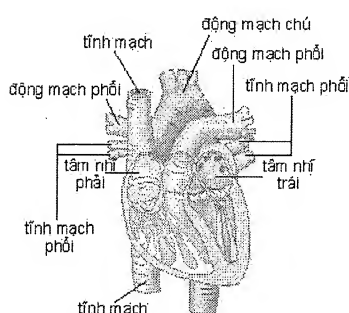


Hãy tưởng tượng một chiếc xe hơi đang di chuyển với vận tốc  $48.3 \text{ km/h}$ . Nếu ta phanh xe bình thường sẽ mất một khoảng thời gian từ 1,5 tới 2s để dừng hoàn toàn nhưng khi xảy ra va chạm, xe dừng chỉ trong 150ms và đỉnh của độ giảm tốc có thể đe dọa đến tính mạng kéo dài trong 10ms, do đó mà các nhà khoa học đã nghiên cứu ra chỉ số nghiêm trọng  $SI = \int_0^T [a(t)]^{2.5} dt$

trong đó  $T$  là thời gian diễn ra giảm tốc,  $a(t)$  là độ giảm tốc tại thời gian  $t$  và chỉ số 2,5 được chọn cho đầu và những chỉ số khác được chọn cho những bộ phận khác trong cơ thể.

## 2. Cung lượng tim

Tim hoạt động như một cái bơm vừa hút vừa đẩy: hút máu ở các tĩnh mạch vào tâm nhĩ, đẩy máu từ tâm thất vào các động mạch, làm cho máu lưu thông khắp cơ thể. Cung lượng tim của tim là khối lượng máu được bơm bởi tim trong mỗi đơn vị thời gian, có nghĩa là, tốc độ dòng chảy vào động mạch chủ.



Phương pháp pha loãng chất chỉ thị màu được sử dụng để đo cung lượng tim. Chất chỉ thị màu được tiêm vào tâm nhĩ phải và chảy qua tim vào động mạch chủ. Một đầu dò được đặt vào động mạch chủ để đo nồng độ của chất chỉ thị màu để lại trên tim tại những thời điểm cách đều nhau trên một đoạn thời gian  $[0, T]$  cho đến khi chất chỉ thị màu đã sạch. Giả sử  $c(t)$  là nồng độ của chất chỉ thị màu tại thời điểm  $t$ .

Nếu ta chia đoạn  $[0, T]$  thành các đoạn con bằng nhau với độ dài mỗi đoạn là  $\Delta t$ , khi đó số lượng chất chỉ thị màu chảy

qua các điểm thời gian trong mỗi đoạn con từ  $t = t_{i-1} \rightarrow t = t_i$  là khoảng (nồng độ)(khối lượng) =  $c(t_i)(F \Delta t)$

trong đó  $F$  là tốc độ của dòng chảy mà ta cần phải xác định. Như vậy, tổng số

lượng chất chỉ thị màu là khoảng  $\sum_{i=1}^n c(t_i) F \Delta t = F \sum_{i=1}^n c(t_i) \Delta t$  và cho  $n \rightarrow \infty$  ta tìm

được số lượng chất chỉ thị màu là  $A = F \int_0^T c(t) dt$  do đó cung lượng tim được cho

bởi công thức:  $F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}$  ở đây số lượng chất chỉ thị màu  $A$  đã biết và có thể

tính gần đúng tích phân của nồng độ đo được.

**Bài tập tự luyện**

**Câu 1.** Một thùng xách nước hình trụ có chiều cao 4dm, đường kính đáy 2dm. Người ta dùng các thùng này để xách nước đổ vào một cái bể hình lập phương cạnh 1,5m. Giả sử mỗi lần xách đều đầy nước trong thùng và khi đổ 100 thùng thì được 90% thể tích bể. Hỏi ban đầu số lít nước có trong bể **gần với giá trị** nào sau đây?

- A. 3038.                      B. 3375.                      C. 1257.                      D. 1781.

**Câu 2.** Một hạt proton di chuyển trong điện trường có gia tốc  $a = \frac{-20}{2t+1} \text{ cm/s}^2$  với  $t$  tính bằng giây. Tìm hàm vận tốc  $v$  theo  $t$ , biết rằng khi  $t=0$  thì  $v=30 \text{ cm/s}$

- A.  $\frac{-20}{2t+1} + 30$ .                      B.  $\frac{10}{2t+1}$ .                      C.  $\frac{10}{2t+1} + 20$ .                      D.  $2t+1^{-3} + 30$ .

**Câu 3.** Thầy Lực gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng  $X$  và  $Y$  theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng  $X$  với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng  $Y$  với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền Thầy Lực gửi lần lượt ở ngân hàng  $X$  và  $Y$  là bao nhiêu?

- A. 140 triệu và 180 triệu.                      B. 120 triệu và 200 triệu.  
C. 200 triệu và 120 triệu.                      D. 180 triệu và 140 triệu.

**Câu 4.** Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân 1,2%/năm thì sau  $n$  năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi  $n$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. 8 năm.                      B. 9 năm.                      C. 7 năm.                      D. 10 năm.

**Câu 5.** Một đơn vị sản xuất hộp đựng thuốc dung tích  $2\text{dm}^3$  dạng hình trụ có đáy là hình tròn. Nhà sản xuất chọn bán kính đáy của hình hộp gần với số nào để ít tốn vật liệu nhất?

- A. 1,37dm.                      B. 1dm.                      C. 2dm.                      D. 0,68dm.

**Câu 6.** Một người gửi tiền tiết kiệm 200 triệu đồng vào một ngân hàng với kỳ hạn một năm và lãi suất 8,25% một năm, theo thể thức lãi kép. Sau 3 năm tổng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được là (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 124,750 triệu đồng.                      B. 253,696 triệu đồng.  
C. 250,236 triệu đồng.                      D. 224,750 triệu đồng.

**Câu 7.** Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông. Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít

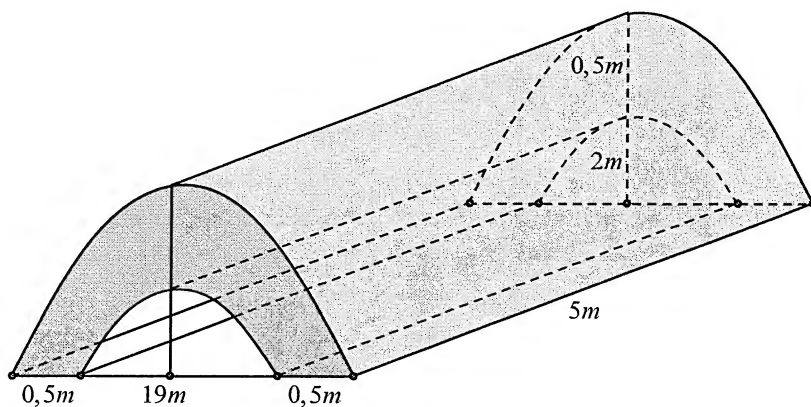
nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể và thể tích của hộp là  $4 \text{ dm}^3$ .

- A. 1 dm.      B. 1,5 dm.      C. 2 dm.      D. 0,5 dm.

**Câu 8.** Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% / 1 kỳ. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi)

- A. 4 năm 1 quý      B. 4 năm 2 quý      C. 4 năm 3 quý      D. 5 năm

**Câu 9.** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

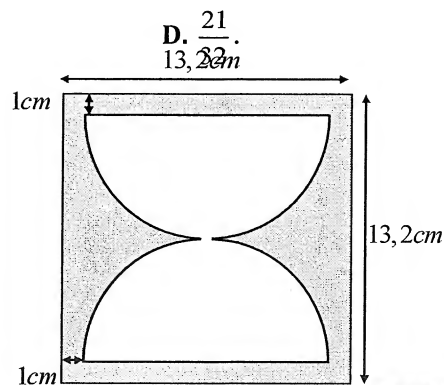


- A.  $19\text{m}^3$ .      B.  $21\text{m}^3$ .      C.  $18\text{m}^3$ .      D.  $40\text{m}^3$ .

**Câu 10.** Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích  $150 \text{ m}^3$ . Đáy bể làm bằng bê tông giá 100000 đ/m<sup>2</sup>. Phần thân làm bằng tôn giá 90000 đ/m<sup>2</sup>, nắp bằng nhôm giá 120000 đ/m<sup>2</sup>. Hỏi khi chi phí sản xuất để bể đạt mức thấp nhất thì tỷ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu?

- A.  $\frac{22}{9}$ .      B.  $\frac{9}{22}$ .      C.  $\frac{31}{22}$ .      D.  $\frac{21}{13,2}$ .

**Câu 11.** Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần giới hạn bởi hình trụ và phần hai nửa hình cầu chứa cát). Khi đó, lượng thủy tinh làm

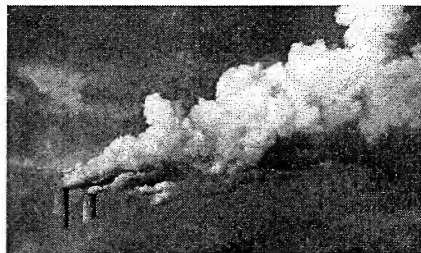




chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

- A. 1070,8  $cm^3$ .      B. 602,2  $cm^3$ .      C. 711,6  $cm^3$ .      D. 6021,3  $cm^3$ .

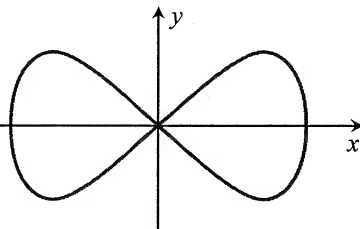
**Câu 12.** Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm  $2^\circ C$  thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm  $5^\circ C$  thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%.



Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm  $t^\circ C$ , tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm  $f(t)\%$  thì  $f(t) = k \cdot a^t$  (trong đó  $a, k$  là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

- A.  $9,3^\circ C$ .      B.  $7,6^\circ C$ .      C.  $6,7^\circ C$ .      D.  $8,4^\circ C$ .

**Câu 13.** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ  $Oxy$  là  $16y^2 = x^2(25 - x^2)$  như hình vẽ bên.



Tính diện tích  $S$  của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ  $Oxy$  tương ứng với chiều dài 1 mét.

- A.  $S = \frac{125}{6} (m^2)$       B.  $S = \frac{125}{4} (m^2)$       C.  $S = \frac{250}{3} (m^2)$       D.  $S = \frac{125}{3} (m^2)$

**Câu 14.** Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức  $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ , trong đó  $m_0$  là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm  $t=0$ ),  $m(t)$  là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm  $t$  và  $T$  là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ  $Po^{210}$  là 138 ngày đêm. Hỏi 0,168 gam  $Po^{210}$  sau 414 ngày đêm sẽ còn lại bao nhiêu gam?

A. 0,021.    B. 0,056.    C. 0,045    D. 0,102

**Câu 15.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam). Tính số con cá phải thả trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

A. 14.                      B. 12.                      C. 15.                      D. 13.

**Câu 16.** Một quả bóng bàn được đặt tiếp xúc với tất cả các mặt của một cái hộp hình lập phương. Tỉ số thể tích của phần không gian nằm trong hộp đó nhưng nằm ngoài quả bóng bàn và thể tích hình hộp là

A.  $\frac{8-\pi}{8}$ .                      B.  $\frac{2}{3}$ .                      C.  $\frac{6-\pi}{6}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 17.** Một ô tô đang di chuyển với vận tốc  $v_1(t) = 2t + 16$  (m/s) (gọi là lúc xuất phát) sau khi đi được một khoảng thời gian  $t_1$  thì bất ngờ gặp chướng ngại vật nên tài xế phanh gấp với vận tốc  $v_2(t) = 16 + 6t_1 - 4t$  (m/s) và đi thêm một khoảng thời gian  $t_2$  nữa thì dừng lại. Biết tổng thời gian từ lúc xuất phát đến lúc dừng lại là 4(s). Hỏi xe đã đi được quãng đường nhiều nhất là bao nhiêu mét?

A. 32m.                      B. 80m.                      C. 64m.                      D. 48m.

**Câu 18.** Một người có số tiền là 20.000.000 đồng đem gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8,5%/năm. Vậy sau thời gian 5 năm 8 tháng, người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến 100 đồng). Biết rằng người đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn 0,01% một ngày. (1 tháng tính 30 ngày).

A. 31.802.700 đồng.    B. 30.802.700 đồng.    C. 32.802.700 đồng.    D. 33.802.700 đồng.

**Câu 19.** Một chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

A. 54 (m/s).                      B. 216 (m/s).                      C. 30 (m/s).                      D. 400 (m/s).

**Câu 20.** Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 30 - 2t$  (m/s). Hỏi trong 5s trước khi dừng hẳn, vật di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 50m.                      B. 225m.                      C. 125m.                      D. 25m.

**Câu 21.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -t^3 + 12t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t$  (giây) bằng:

- A.  $t = 4$ .      B.  $\begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$       C.  $t = 6$ .      D.  $t = 2$ .

**Câu 22.** Một người có một dải duy băng độ dài  $180(cm)$ . Người đó cần bọc dải duy băng đó đi quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà người này dùng  $20(cm)$  để thắt nơ trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng đó có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

- A.  $\frac{54000}{27}(cm^3)$ .      B.  $\frac{64000}{27}(cm^3)$ .  
C.  $\frac{54000}{81}(cm^3)$ .      D.  $\frac{64000}{81}(cm^3)$ .



**Câu 23.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức  $G(x) = 0,024x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp ( $x$  được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A.  $20\text{ mg}$ .      B.  $0,5\text{ mg}$ .      C.  $2,8\text{ mg}$       D.  $15\text{ mg}$ .

**Câu 24.** Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi  $P(t)$  là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng  $t$  năm trước đây thì  $P(t)$  được cho bởi công thức  $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} \%$ . Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là  $65,21\%$ . Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

- A.  $3574(\text{năm})$ .      B.  $3754(\text{năm})$ .      C.  $3475(\text{năm})$ .      D.  $3547(\text{năm})$ .

**Câu 25.** Một vận động viên đua xe  $F$  đang chạy với vận tốc  $10(m/s)$  thì anh ta tăng tốc với vận tốc  $a(t) = 6t(m/s^2)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian  $10(s)$  kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

- A.  $1100m$ .      B.  $100m$ .      C.  $1010m$ .      D.  $1110m$ .

**Câu 26.** Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể rìa, mép)

- A.  $350\pi$ .                      B.  $400\pi$ .                      C.  $450\pi$ .                      D.  $500\pi$ .

**Câu 27.** Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

- A. 46 tháng.                      B. 45 tháng.                      C. 44 tháng.                      D. 47 tháng.

**Câu 28.** Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

- A. 104,3 triệu người.    B. 105,3 triệu người.    C. 103,3 triệu người.    D. 106,3 triệu người.

**Câu 29.** Một đám vi trùng tại ngày thứ  $t$  có số lượng là  $N(t)$ . Biết rằng  $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$  và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

- A. 322542 con.                      B. 332542 con.                      C. 312542 con.                      D. 302542 con.

**Câu 30.** Năm 2014, một người đã tiết kiệm được  $x$  triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần  $1,55x$  triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là 6,9% / năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).

- A. Năm 2019.                      B. Năm 2020.                      C. Năm 2021.                      D. Năm 2022.

### Bảng Đáp Án

1.D	2.C	3.A	4.A	5.D	6.B	7.A	8.A	9.D	10.A
11.A	12.C	13.D	14.A	15.B	16.C	17.B	18.A	19.A	20.D
21.A	22.B	23.A	24.D	25.A	26.A	27.B	28.B	29.C	30.C

Như vậy là các em đã đi tới trang cuối cùng của cuốn sách, kết thúc trang này là mở ra 1 cánh cửa mới trong cuộc đời các em, tràn đầy sức mạnh để tiến bước vào con đường Đại Học. Chúc các em chiến thắng! Luôn tự tin vào bản thân nhé.... Cố gắng lên!

Cuốn sách này còn gồm 1 bộ Video ngoài hướng dẫn các kĩ năng đã có trong sách, trong đó còn có rất nhiều kĩ năng Casio khác nữa được Update và nhiều bài tập để các em rèn luyện, các em nhớ theo dõi ở link: [bikiptheluc.com/sach](http://bikiptheluc.com/sach) và Group Kín để cập nhật các dạng mới và sau này anh gửi khóa học LiveStream Casio tổng ôn 7 ngày cuối tu luyện cùng Sếp Lực.

\_\_\_\_\_ Hà Nội 15/10/2017 – Nhất Đại Tông Sư: Thế Lực \_\_\_\_\_